Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Educación
Unidad de Posgrado

Estrategias metodológicas basadas en acción proceso objeto esquema y comprensión de la integral definida en estudiantes de los colegios de alto rendimiento

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Educación

AUTOR

José Luis MAÚRTUA AGUILAR

ASESOR

Dr. Abelardo CAMPANA CONCHA

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Maúrtua, J. (2019). *Estrategias metodológicas basadas en acción proceso objeto esquema y comprensión de la integral definida en estudiantes de los colegios de alto rendimiento*. Tesis para optar grado de Doctor en Educación. Unidad de Posgrado, Facultad de Educación, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS

1. **DÓDIGO ORCID DEL ASESOR: 0000000294795363**
2. **DNI O CÉDULA DEL AUTOR: 21874408**
3. **UBICACIÓN GEOGRÁFICA DONDE SE DESARROLLO LA INVESTIGACIÓN:**

   3.1 COLEGIO DE ALTO RENDIMIENTO DE PIURA

   - **Región: Piura**
   - **Dirección: Prolongación Chulucanas, 26 de octubre 073, Perú.**
   - **Coordenadas Geográficas:**
     Latitud: -5.1909217
     Longitud: -80.6680568

   3.2 COLEGIO DE ALTO RENDIMIENTO LA LIBERTAD

   - **Región: La Libertad**
   - **Dirección: LI-119, Virú, Perú**
   - **Coordenadas Geográficas:**
     Latitud: -8.41169
     Longitud: -78.7246

   3.3 COLEGIO DE ALTO RENDIMIENTO TACNA

   - **Región: Tacna**
   - **Dirección: Av. Collpa, Zona Franca de Tacna, Tacna 23006, Perú.**
   - **Coordenadas Geográficas:**
     Latitud: -18.0491179
     Longitud: -70.2842248

4. **AÑO O RANGO QUE ABARCÓ LA INVESTIGACIÓN :**
   COMIENZO: MAYO 2018
   TÉRMINO: JULIO 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE LA TESIS PRESENTADA POR DON JOSÉ LUIS MAÚRTUA AGUILAR PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN EDUCACIÓN

En la ciudad de Lima, a los 16 días del mes de julio del 2019, siendo 11:00 a.m. se reunió en acto público en el Salón de Grados de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, el Jurado Examinador integrado por el Dr. Edgar Damián Núñez (Presidente), Dr. Abelardo Campana Concha (Asesor), Dr. Miguel Inga Arias (Jurado Informante), Dr. Salomón Berrocal Villegas (Jurado Informante) y al Dr. Carlos Dextre Mendoza (Miembro del Jurado), para recepcionar la sustentación de la tesis titulada: **ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS BASADAS EN ACCIÓN PROCESO OBJETO ESQUEMA Y COMPRENSIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE LOS COLEGIOS DE ALTO RENDIMIENTO**, que presenta don **JOSÉ LUIS MAÚRTUA AGUILAR,** para obtener el Grado Académico de Doctor en Educación.

Para el efecto, el Jurado Examinador tuvo a la vista el informe favorable del Jurado Informante integrado por el Dr. Abelardo Campana Concha (Asesor), Dr. Miguel Inga Arias (Jurado Informante) y al Dr. Dr. Salomón Berrocal Villegas (Jurado Informante).

Después de haber escuchado la sustentación del graduando, el Jurado Examinador procedió a formular las preguntas reglamentarias y, luego de una deliberación en privado, decidió otorgarle el calificativo de:

Muy Bueno (18) Dieciocho

Como testimonio del acto que culminó a las 12.20 p.m. horas, cada uno de los miembros del Jurado Examinador procedió a suscribir el acta, para que se remita a las instancias correspondientes y se expida, previo trámite administrativo, el diploma que acredite a don **JOSÉ LUIS MAÚRTUA AGUILAR,** para obtener el Grado Académico de Doctor en Educación.

Dr. EDGAR DAMIÁN NÚÑEZ
Presidente

Dr. ABELARDO CAMPANA CONCHA
Asesor

Dr. MIGUEL INGA ARIAS
Jurado Informante

Dr. SALOMÓN BERROCAL VILLEGAS
Jurado Informante

Dr. CARLOS DEXTRE MENDOZA
Miembro del Jurado

2do Piso del Pabellón Administrativo, Ciudad Universitaria, Calle Germán Amézaga N° 375 (Alt. Cdra. 57 Av. Colonial) - Lima 01
Telefax: 451 3045 Teléfono: 619 7000 - Anexos: 3020 - 3051
Web: www.unmsm.edu.pe/educacion/postgrado/index.html

Dedicatoria:

- A mis padres Eladio y Victoria, por enseñarme que a través de la educación alcanzaría mis objetivos y mis anhelos en la vida.
- A mi hermano Eladio Félix que partió a la eternidad dejándome lecciones de vida.
- A Jhoselyn, José Luis, Geraldine y Emma por su comprensión, apoyo incondicional y aliento permanente para la culminación de la presente investigación.
- A las generaciones que me preceden.

Agradecimiento:

- A Dios, por darme la fortaleza para alcanzar mis objetivos de vida.
- A mi familia por acompañarme en esta aventura más, cristalizada con esta investigación.
- Al Dr. Abelardo Campana Concha por su valioso apoyo en la asesoría y culminación de la Tesis.
- A los maestros, Víctor Cabrera, Marcial Váquez, David Gallardo y a Henry Manrique, por su incondicional apoyo en la ejecución de la presente investigación.
- A las Autoridades, profesores y estudiantes de la red de Colegios de Alto Rendimiento, por su apoyo brindado en la ejecución de la investigación.

Índice General

Índice de Tablas

Índice de Gráficos

R E S U M E N

El estudio científico permitió alcanzar el objetivo general de la investigación que consistía en demostrar la influencia de la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema en la comprensión de la integral definida, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento– Perú, 2018. La investigación es de tipo cuantitativa con diseño cuasi experimental, el mismo que fue aplicado a dos grupos de estudio conformado por 197 estudiantes. Para la prueba de hipótesis se utilizó el estadístico T de Student, con el propósito de comparar la diferencia de medias a partir del pre y pos test aplicado al grupo control y experimental.

Los resultados de las variables estudiadas estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema y la comprensión de la integral definida determinan una diferencia de medias en el orden de 2,72 puntos entre el pre y pos test, lo cual demuestra que la aplicación de la estrategias metodológicas aprendizajes basada en acción proceso objeto esquema permite mejorar la comprensión de la integral definida en los estudiantes del 5to grado de los Colegios de Alto Rendimiento (COAR).

Con respecto al análisis de las diferencias de medias entre la pre y pos prueba acerca de las tres hipótesis específicas, se pudo establecer incrementos de 2,87; 1,34 y 0,96 puntos en sus promedios académicos con respecto a la influencia ocasionada por las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre el conocimiento y comprensión, comunicación y representación y resolución de problemas, respectivamente.

Palabras claves: aprendizaje, matemáticas, conocimiento, comprensión, comunicación, representación, resolución de problemas.

ABSTRACT

The scientific study allowed to reach the general objective of the research that consisted in demonstrating the influence of the application of the methodological strategies based on action process object scheme in the comprehension of the definite integral, in the students of the 5th grade of secondary of the Colleges of High Performance- Peru, 2018. The research is of quantitative type with quasi-experimental design, the same that was applied to two study groups conformed by 197 students. For the hypothesis test the Student's T statistic was used, with the purpose of comparing the difference of means from the pre and post test applied to the control and experimental group.

The results of the variables studied methodological strategies based on action process object schema and the understanding of the definite integral determine a difference of means in the order of 2.72 points between the pre and post test, which shows that the application of the strategies methodological learning based on action process object scheme allows to improve the understanding of the integral defined in the 5th grade students of the High Performance Schools (COAR).

With respect to the analysis of the differences of means between the pre and post test about the three specific hypotheses, it was possible to establish increases of 2.87; 1.34 and 0.96 points in their academic averages with respect to the influence caused by methodological strategies based on action process object scheme on knowledge and understanding, communication and representation and problem solving, respectively.

Keywords: learning, mathematics, knowledge, understanding, communication, representation, problem solving.

RESUMO

O estudo científico permitiu atingir o objetivo geral da pesquisa que consistiu em demonstrar a influência da aplicação das estratégias metodológicas baseadas no esquema de objeto de processo de ação na compreensão da integral definida, nos alunos do 5º ano do ensino médio das Faculdades de São Paulo. Alto Desempenho - Peru, 2018. A pesquisa é do tipo quantitativa com delineamento quase-experimental, a mesma que foi aplicada a dois grupos de estudo formados por 197 estudantes. Para o teste de hipóteses, utilizou-se a estatística T de Student, com o objetivo de comparar a diferença de médias entre o pré e o pós-teste aplicado ao grupo controle e experimental.

Os resultados das variáveis estudadas estratégias metodológicas baseadas no esquema de objeto de processo de ação e a compreensão da integral definida determinam uma diferença de médias na ordem de 2,72 pontos entre o pré e o pós teste, o que mostra que a aplicação das estratégias A aprendizagem metodológica baseada no esquema de objeto de processo de ação permite melhorar a compreensão da integral definida nos alunos do 5º ano das Escolas de Alta Performance (COAR).

Com relação à análise das diferenças de médias entre o pré e o pós teste sobre as três hipóteses específicas, foi possível estabelecer aumentos de 2,87; 1,34 e 0,96 pontos em suas médias acadêmicas com relação à influência causada por estratégias metodológicas baseadas no esquema de objeto de processo de ação sobre conhecimento e compreensão, comunicação e representação e resolução de problemas, respectivamente.

Palavras-chave: aprendizagem, matemática, conhecimento, compreensão, comunicação, representação, resolução de problemas.

I N T R O D U C C I Ó N

La investigación acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han puesto mayor atención al desarrollo del pensamiento matemático avanzado (PMA) y a la comprensión de objetos matemáticos en estudiantes de secundaria, tal como la integral definida. La experiencia docente nos permite reconocer la variedad y complejidad de elementos para planificar, organizar, implementar y evaluar propuestas pedagógicas que permitan desarrollar las competencias matemáticas de los estudiantes.

El tratamiento de la integral definida se justifica dada la importancia por sus aplicaciones en otros campos del conocimiento (ciencias físicas, económicas y las diversas ramas de ingeniería) y por ser un tópico conformante del plan de estudio de los COAR.

El trabajo de investigación plantea como objetivo general "Demostrar la influencia de la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre el aprendizaje de las matemáticas, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018".

Para ello, se utilizó el diseño cuasi experimental con Pre Test y Post Test con un grupo de control y un grupo experimental; así como la aplicación de una encuesta sobre el impacto de la estrategia metodológica propuesta. En el primer capítulo se aborda la situación problemática, formulación del problema, la justificación teórica y práctica de la investigación; así como el planteamiento de los objetivos, la fundamentación y formulación de las hipótesis, y la tipificación de las variables de estudio. El segundo capítulo, realiza un abordaje epistémico de la investigación, los antecedentes y las bases teóricas implicadas en el estudio. El tercer y cuarto capítulo incluye la metodología; el análisis, interpretación y discusión de resultados, pruebas de hipótesis y la presentación de los resultados; respectivamente. Así mismo, se presenta las conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y los correspondientes anexos que ayudan a comprender aspectos más específicos de la presente investigación.

CAPÍTULO 1: PROBLEMA

1.1. Situación Problemática

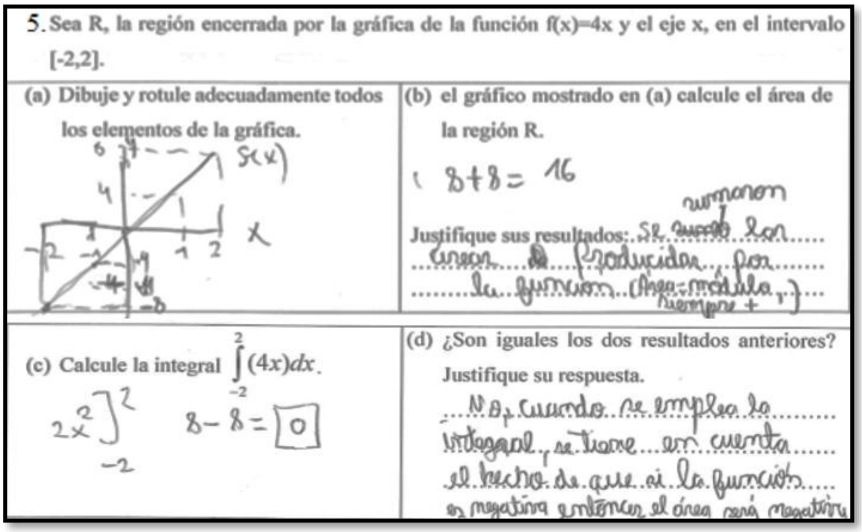
La presente investigación trata acerca de la comprensión del concepto de la integral definida basada en las construcciones cognitivas tales como la Acción, Proceso, Objeto y Esquema en estudiantes de 5to grado de secundaria de la Red de Colegios de Alto Rendimiento (COAR) que funcionan en cada región del país y cuyas edades oscilan entre los 15 y 18 años.

Para ello, se proponen estrategias metodológicas que se enmarcan dentro de las investigaciones sobre la didáctica de matemática y en el campo del desarrollo del pensamiento matemático avanzado (PMA). Esto permitirá explorar conceptos desde los más elementales hasta desarrollar habilidades de comprensión de la integral definida utilizando diversas representaciones matemáticas.

En el presente capítulo realizaremos algunas reflexiones sobre el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos y el tratamiento de la integral definida como ámbito de investigación desde la sesión de clase por parte de los docentes y estudiantes de los COAR. Finalmente formularemos el problema de investigación, así como los objetivos y las hipótesis de la investigación.

Dentro de las reflexiones sobre el plan de estudio de los COAR y el aprendizaje y comprensión de la integral definida en los estudiantes, es preciso señalar que el Modelo de Servicio Educativo creado con Resolución Ministerial N°274-2014-MINEDU, tiene como propósito atender y desarrollar una educación basada en los principios de excelencia, calidad y equidad a estudiantes de alto desempeño del sétimo ciclo de la Educación Básica Regular (EBR); a través de un proceso formativo de alta exigencia y rigurosidad en lo académico, artístico y/ o deportivo. El referido modelo implementa el Programa del Diploma (PD) perteneciente a la Organización del Bachillerato Internacional (OBI); cuyo plan de estudio –validado y sujeto a estándares internacionales- es diversificado según las características de los estudiantes de los COAR. Complementando a lo anterior, el Modelo Pedagógico implementa el currículo tomando en cuenta el enfoque por competencias, el enfoque de la enseñanza para la comprensión y el enfoque complejo de competencias, enfatizando la construcción del conocimiento en el proceso de enseñanza aprendizaje. En ese sentido, dentro de la programación bianual en la asignatura de matemática que desarrollan los estudiantes de cuarto y quinto grado, abordan tópicos relacionados al algebra, funciones y ecuaciones, funciones circulares y trigonometría, vectores, estadística y probabilidad y análisis. Sobre este último, particularmente se desarrollan los tópicos que generalmente se enseñan en la educación superior y que acarrean serias dificultades en la comprensión del concepto de la integral definida en los estudiante, que según Aldana (2011, p. 20), se manifiestan en el tratamiento mecánico, algorítmico y memorístico de la definición, además de no lograr establecer coordinación entre las diversas representaciones matemáticas: numérico, algebraico, geométrico y analítico; para interpretar por ejemplo el área de un recinto formada por debajo de la curva cuando la función es negativa, o cuando la función presentan discontinuidades. En el desarrollo del ítem tomado en la prueba de salida de esta investigación se puede observar la forma cómo el objeto matemático está encapsulado en el esquema mental del estudiante.

Gráfico 1. **Tratamiento del área de una región debajo de función positiva y negativa**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

El tratamiento de la situación matemática refleja discordinación entre las diversas representaciones matemáticas; ya que, por un lado afirma que el área siempre es positiva, y por el otro; condiciona el signo de esta cuando halla el área de una región o recinto por el hecho que la función es positiva o negativa; es decir, dentro del esquema mental del estudiante se tiene segmentada los procesos matemáticos que no es capaz de articularlas eficientemente.

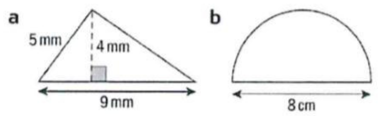
En ese contexto, para el aprendizaje de la integral definida se requiere estructurar el aprendizaje de menor a mayor complejidad y que todos los procesos de comprensión del concepto matemático promuevan el desarrollo de los procesos que permitan incorporar conocimiento complejos, característicos del pensamiento matemático avanzado (PMA) como son: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar.

Este conjunto de hechos nos plantea la necesidad de implementar estrategias metodológicas en la sesión de clase, que permitan la comprensión del concepto matemático como es la integral definida y solventar la problemática identificada.

Por otro lado, en la red de los COAR la planificación curricular de la asignatura de matemática responde al principio de uniformidad; es decir todos los colegios desarrollan la misma programación curricular y las unidades de aprendizaje en contenido y temporalidad. Lo que aún está en proceso de estandarización son las sesiones de clase, dada las particularidades de cada institución, el enfoque de la sesión que tienen los equipos de maestros y lo medios, materiales y recursos con las que se cuenta. Respecto a lo último, se describirá como los docentes realizan las actividades de enseñanza aprendizaje que influyen en la comprensión de la integral definida como concepto matemático, que según Vásquez (2018), “los factores que influyen en la deficiente aplicación de estrategias y procesos didácticos en la asignatura de matemática se deben a que en el proceso pedagógico no se toma en cuenta la resolución de problemas del contexto, sino que hay predominancia en lo disciplinar y desarrollo de contenidos muchas veces desarticulados y lejanos de la realidad” (p.7).

Por ejemplo para el abordaje de las sumatorias como conocimiento previo a la construcción y comprensión del concepto de la integral, el docente inicia el abordaje con contextos poco significativo, realizando el tratamiento solo algebraico del objeto matemático desconectado del contexto real del estudiante. En ese sentido, la práctica pedagógica se vuelve árida e intrascendente, desaprovechando el espacio pedagógico para fortalecer el principio de la interdisciplinariedad para la comprensión de sistemas complejos que plantea el modelo pedagógico de los COAR, (2016, p.7). En virtud a ello, se debe propiciar aprendizaje interdisciplinario en diversos contextos, establecer conexiones con otras disciplinas del conocimiento, a plantear preguntas razonadas a partir de esas experiencias significativas y asegurar la comprensión del concepto matemático en la sesión clase.

Gráfico 2. **Tratamiento de la sumatoria como base en la comprensión del concepto de la integral definida**

INICIO:		
El docente inicia la sesión saludando cordialmente a los estudiantes. Seguidamente, se recupera saberes previos de las reglas de derivación. Luego a través de una ficha de trabajo, fortalece los tópicos de sumatorias, áreas y volúmenes. **1** Escriba como una suma de términos. **a** $\sum_{i=1}^{5}(2i^2)$ **b** $\sum_{k=2}^{6}(3k-2)$ **c** $\sum_{i=1}^{5}[(i)^2 g(x_i)]$ **d** $\sum_{j=1}^{3}[f(x_j)(\Delta x_j)]$ **2** Halle el área.  	- Pizarra acrílica y plumones. -Ficha de trabajo	15 min

Fuente. Sesión de clase_La integral indefinida. COAR Arequipa (2018)

Siguiendo con el estudio de la secuencia presentada en la sesión de clase; en el segundo momento de la sesión clase denominado “desarrollo” se puede observar que la clase sigue siendo algorítmica, algebrizada, con recetarios de reglas y fórmulas que los estudiantes ignoran su procedencia y que aplicarán mecánicamente construyendo conceptos que parten de vacíos de comprensión. En consecuencia, el desarrollo de competencias complejas está supeditado solo a resolver una batería de ejercicios de menor a mayor dificultad, tal como se puede ver a continuación:

Gráfico 3. **Tratamiento de la integral indefinida y sus reglas de integración**

→ **Regla de la potencia**

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \; n \neq 1$$

→ **Regla de la constante**

$$\int k \, dx = kx + C$$

→ **Regla de la multiplicación por una constante**

$$\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

→ **Regla de la adición o la sustracción**

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

-Seguidamente el docente, plantea y resuelve ejercicios básicos, para calcular la anti derivada, mediante reglas de integración, empleando diferentes estrategias, con la participación activa de los estudiantes.
-Después se conforman equipos de trabajo, compuesto por 4 integrantes, para resolver y socializar los problemas propuestos en la guía de ejercicios propuestos.

PRÁCTICA DE ANTIDERIVADAS

Ejercitación 9A

Halle la antiderivada de cada función.

1 x^7	**2** x^4	**3** x^{-2}	**4** $x^{-\frac{1}{2}}$
5 $x^{\frac{1}{3}}$	**6** $x^{\frac{2}{5}}$	**7** $\frac{1}{x^4}$	**8** $\frac{1}{x^{12}}$
9 $\sqrt[3]{x}$	**10** $\sqrt[7]{x^3}$	**11** $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$	**12** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

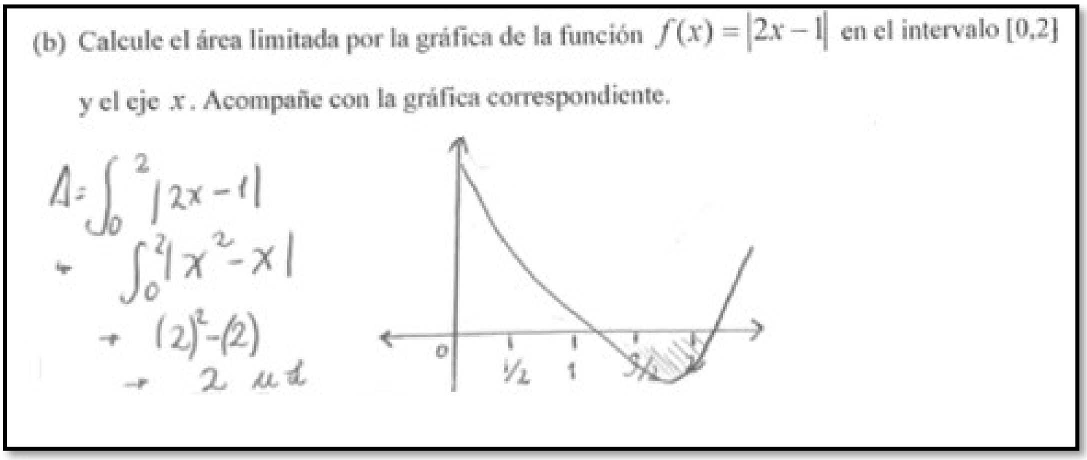
Fuente. Sesión de clase_La integral indefinida. COAR Arequipa (2018)

Este tipo de tratamiento no asegura comprensión del concepto matemático, ya que no promueve espacios para gestionar conocimientos a través de estrategias de investigación, reflexión y socialización; o generar un clima de trabajo adecuado para la indagación y búsqueda de información local y global utilizando fuentes primarias o secundarias, y desarrollar participación activa para estimular la curiosidad, el pensamiento crítico y la resolución de problemas verdaderamente del contexto. Adicionalmente, los estudiantes para el aprendizaje de la matemática centran su atención en procedimientos mecánicos, rutinarios y algorítmicos, en las que predomina el memorismo y en las que está ausente la conexión entre el pensamiento matemático y el desarrollo de las competencias matemáticas relacionadas a la resolución de problemas de cantidad; regularidad, equivalencia y cambio; forma, movimiento y localización; y, gestión de datos e incertidumbre.

Respecto a la problemática de proponer estrategias metodológicas desde las aulas para la comprensión del concepto matemático –integral definida en nuestro caso-, muchos investigadores han realizado importantes investigaciones sobre los problemas de aprendizaje y comprensión de la integral definida, como objeto matemático en particular y del análisis matemático en general. Entre ellos, Dreyfus y Eisenberg (1990), señalan que el análisis matemático es una rama de la matemática avanzada que más tiempo demanda en su enseñanza, y aprendizaje; es en ese sentido, que en la presente investigación se pone especial atención en el abordaje de estos tópicos, ya que en nuestro caso, son estudiantes de secundaria con una madurez cognitiva en proceso de desarrollo. Al respecto, Dreyfus (1991) citado en Camacho (2003), manifiesta que "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales." (p. 135).

Como se ha indicado, algunas investigaciones exponen las dificultades que tienen los estudiantes en la construcción de los conceptos, al estar asociados a imágenes débiles de los conceptos matemáticos, a utilizarlos en un nivel exclusivamente algorítmico y/o memorístico y al estar relacionados con concepciones erróneas. En nuestra investigación por ejemplo, el estudiante asocia el concepto de la integral definida para encontrar el área del recinto debajo de la curva, sin considerar la comprensión de otros objetos matemático superficialmente encapsulado, como son la definición del valor absoluto y su representación gráfica.

Gráfico 4. **Tratamiento del área debajo de una curva utilizando conceptos matemáticos carentes de comprensión**

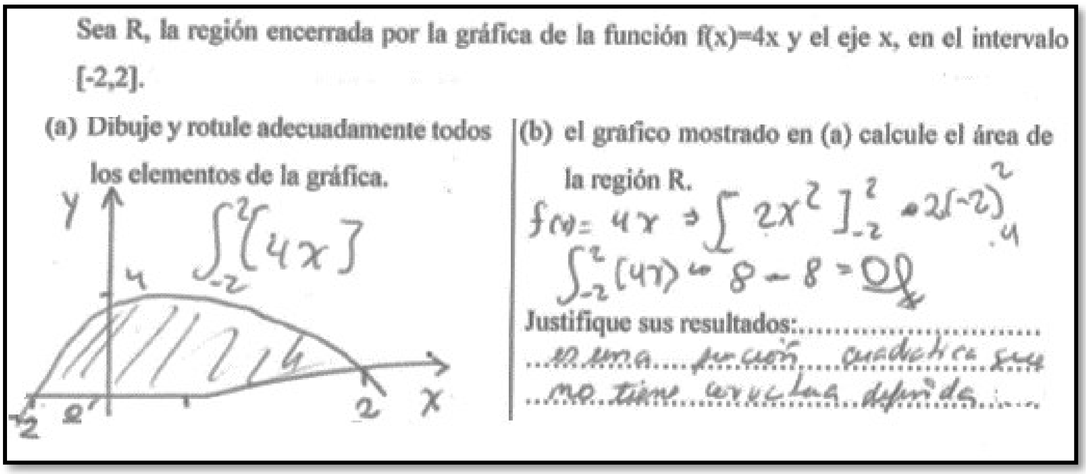


Fuente. Maurtua, J. (2018)

En relación con estos conceptos matemáticos, el estudiante recuerda algo que no necesariamente es la definición del concepto, sino, la imagen que se tiene de este, que en palabras Tall y Vinner (1981), consiste en “toda la estructura cognitiva de un sujeto asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto. Esta imagen, se construye a lo largo de los años por experiencias de toda clase y va cambiando según el individuo madura y encuentra nuevos estímulos” (p.152). En el mismo orden de ideas, para Camacho, C., Azcarate C. y González, M., y Moreno, M. (2003) “Una imagen mental es el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente del sujeto, incluyendo cualquier tipo de representación del concepto matemático que puede ser gráfica, numérica, o simbólica entre otras” (p.137). En cambio, “la definición del concepto, se refiere a una definición verbal, a un conjunto de palabras para especificar un concepto” (Tall et al, 1981, p. 152).

En ese sentido, la correspondencia entre la imagen y la definición del concepto y los conflicto que subyacen de estas, es en términos prácticos, la carencia de una sólida comprensión del concepto por parte del estudiante. En la presente investigación, se evidenció que el estudiante confunde la representación gráfica de una función lineal con la correspondiente a una función cuadrática; adicionalmente, utiliza la integral definida para hallar el área debajo de la curva, pero; no analiza y reflexiona sobre el resultado obtenido, ya que presenta en el desarrollo un área de cero unidades cuadradas para una región que a la luz de las evidencias tiene un valor mayor que el obtenido.

Gráfico 5. **Conflicto entre la imagen y la comprensión del concepto de la integral definida**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

En ese sentido Vinner (1991), señala la importancia que tienen las representaciones mentales y las definiciones en la construcción y comprensión de los conceptos matemáticos. Al respecto a las representaciones Dreyfus y Eisenberg (1990), reconocen la importancia que tienen en la comprensión de un objeto o concepto matemático, precisando una distinción entre las representaciones simbólicas y las representaciones mentales. La primera -señalan- involucra las relaciones entre los signos y sus respectivos significados y que son representaciones externas que tienen una finalidad comunicativa; y la segunda son representaciones mentales que acopian la generación de imágenes, características o aspectos de cierto objeto matemático; en ese sentido, son representaciones internas y propias de cada sujeto.

Los aspectos analizados tienen relación directa con la presente investigación, ya que el objeto de estudio es la comprensión de la integral definida y establecer los niveles de logro en la comprensión de acuerdo al esquema mental de los estudiantes de secundaria cuyas edades oscilan entre los 15 y 18 años.

En síntesis, la atención académica demanda de docentes con una sólida formación académica y conocedores de una variedad de estrategias metodológicas que aseguren que los aprendizajes en las aulas sean realmente significativas y útiles para la vida cotidiana de los estudiantes; más aún cuando se trata de desarrollar el pensamiento complejo el pensamiento crítico, poco desarrollado en la Educación Básica Regular (EBR).

Al respecto, Aldana (2011) identifica algunos problemas en la comprensión de la integral definida, que están asociadas a aspectos metodológicos y que los sintetiza tal como se señala a continuación: “ a) El proceso de integración es puramente algebraico, más o menos complicado, donde el estudiante conoce y aplica diversas técnicas de integración, pero no es capaz de aplicarlas al cálculo de un área o ignora por completo qué son las sumas de Riemann. b) La primera imagen que evocan muchos estudiantes sobre integral es la de hallar una función de la que se conoce la derivada. c) Los estudiantes generalmente identifican las integrales definidas con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse; por ejemplo cuando una función presenta discontinuidad. d) No existe relación entre el concepto de Integral Definida y el de área debajo de la curva. Muchos estudiantes no distinguen la diferencia entre la integral definida como área y la integral definida cómo cálculo algebraico; porque no establecen una conexión entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función y no son capaces de calcular el área bajo una curva a partir de su gráfica” (Aldana, 2011, p. 402-405).

Frente a esta realidad, se propone cambios en los procesos de enseñanza aprendizaje, aplicando estrategias creativas e innovadoras y dejando de lado el protagonismo del docente tal como sucede en las clases magistrales; desarrollar actividades significativas y dar más protagonismo al estudiante empleando estrategias metodologías más dinámicas (trabajo en equipo, estudios de casos, aprendizaje por descubrimiento, el modelamiento, la indagación, exploraciones matemáticas, tutoría, seminarios, uso de software matemáticos, entre otros.). En este nuevo escenario no cabe duda que el componente “Métodos de Enseñanza” desempeña un papel esencial en la educación, que pretende que el estudiante logre los aprendizajes significativos y el desarrollo de las competencias de manera autónoma y creativa, que aprenda y trabaje de manera más dinámica y autónoma, que busque información considerando la probidad académica, la seleccione, analice y socialice con sus compañeros. Esto implica potenciar la formación del profesorado. No basta con perfeccionar planes de estudios, programas, libros de texto – escasos para el nivel secundario- y otros materiales; sino que también, resulta decisiva la elevación de la calidad de la labor del maestro en el perfeccionamiento de los métodos y estrategias de enseñanza, y la profundización de los conocimientos de la integral definida, ya que muchos docentes provienen de la EBR en cuyo plan de estudios no hay ninguna temática que se relaciona con esta; materia de la investigación.

En ese sentido, para el estudio del proceso docente desde una óptica pedagógica, se considera partir de la teoría curricular, como base sustentante del proceso docente-educativo. Asimismo, para una mejor organización del trabajo a realizar, se tomará como punto de referencia las categorías rectoras de la didáctica, que establecen la secuencia de instancias mediante las cuales se estructura los procedimientos a utilizar.

Por consiguiente, el aporte de esta investigación está centrado en brindar al docente, por una parte; cómo desarrollar capacidades y competencias en los estudiantes a través de la enseñanza de la integral definida a través de una propuesta innovadora que desde luego no se desmarque de la formalidad y rigurosidad matemática, sino que sea el producto de una construcción y el desarrollo de una red de vínculos asociadas a los distintos tipos de representaciones y operaciones mentales relacionadas al concepto de la integral definida. En la propuesta metodológica se tendrá en cuenta que los estudiantes requieren de un periodo de tiempo para adquirir, asimilar, madurar y desarrollar la comprensión de un concepto, que van desde la visión más simplista de los conceptos (geométricos, algebraicos) hasta el empleo del razonamiento formal apoyados de los registros de representación semiótica tal como lo plantea Duval, R (2004).

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿De qué manera la aplicación de estrategias metodológicas basadas en Acción Proceso Objeto Esquema, influye en la comprensión de la integral definida en estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna, Perú 2018?

1.2.2. Problemas específicos

a) ¿De qué manera la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema influye en la dimensión conocimiento y comprensión, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018?

b) ¿De qué manera la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema influye en la dimensión comunica y representa, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018?

c) ¿De qué manera la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema influye en la dimensión resolución de problemas, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018?

1.3. Justificación teórica

La investigación se sustenta en la comprensión de los procesos cognitivos y las implicancias de las propuestas metodológicas, ya que permiten:

- Comprender que desde la teoría del desarrollo epistemológico que postula Piaget, los procesos cognitivos son comunes en todas los campos del conocimiento; y que la educación matemática busca las formas más idóneas para el aprendizaje y comprensión conceptual de los objetos matemáticos.
- Comprender que los signos y los sistemas semióticos son una parte importante del pensamiento matemático; más aún, cuando se observa -en

la práctica- la poca capacidad de los estudiantes para utilizar los registros de representación de acuerdo a sus necesidades de aprendizaje .

- Comprender que la descomposición genética que realizan los estudiantes sobre de la integral definida como concepto matemático, proviene de un proceso de encapsulación superficial en la mayoría de los casos; esto debido al poco tiempo asignado para el aprendizaje del concepto; tal como se muestra en las unidades de aprendizaje que forman parte de los anexos de la presente investigación.
- Reconocer que los estudiantes cuyas edades oscilan entre los 15 a los 18 años, no tienen una madurez mental apropiada para la comprensión de concepto matemáticos complejos. Ello se materializa cuando se requiere poner en evidencias habilidades cognitivas referidas a argumentar, justificar o reflexionar frente a situaciones de comprensión de un concepto.
- Reflexionar sobre una propuesta metodológica que permita asegurar la construcción de los conceptos matemáticos previos al concepto relacionado a la integral definida.
- Evaluar las debilidades académicas que presenta un estudiante en la comprensión de la integral definida, cuando no ha encapsulado eficientemente conceptos conexos, por ejemplo, el límite de una función, la partición de un intervalo, o la suma de Riemann.
- Conocer aspectos de tipo pedagógico y epistémico que dificultan a estudiantes establecer relaciones lógicas, específicamente la conjunción y la condicional, entre los elementos matemáticos; por ejemplo cuando compara las áreas de una región simétrica que están por encima y debajo del eje x, generalmente se afirma que una es positiva y la otra negativa respectivamente.

1.4. Justificación práctica

La presente investigación se justifica porque:

- En los COAR se desarrolla un plan de estudio que desarrollan tópicos de nivel superior que en muchos de los casos son abordados por los estudiantes desde los primeros años del pregrado de la formación universitaria, que tienen un grado de madurez cognitivo teóricamente superior a estudiantes de la EBR en forma general y a los de la red COAR en particular.

- La literatura especializada que abordan la integral definida carecen de un tratamiento metodológico acorde al nivel de un estudiante novel, en las cuales predomina más el enfoque abstracto y formal dejando de lado los diferentes registros de representación semiótica del objeto matemático que aseguran el aprendizaje de los estudiantes, tal como lo señala Duval (2006).
- Permite tener información empírica de las deficiencias y dificultades sobre los niveles de logro en la construcción del concepto de la integral definida, de los estudiantes de la red COAR para diseñar, implementar y evaluar estrategias metodológicas centradas en el estudiante, así mismo diseñar y reajustar instrumentos de planificación y de evaluación que atiendan las necesidades e intereses de aprendizaje de los estudiantes que provienen de todas las regiones del país.
- Permite tener información empírica sobre las fortalezas y debilidades en el desarrollo de la práctica pedagógica de los docentes, para hacer el seguimiento y la asistencia pedagógica como parte de una política de fortalecimiento y capacitación permanente a los maestros, de manera tal que apliquen métodos activos y el uso de herramientas y entornos tecnológicos en el proceso de la Enseñanza-Aprendizaje de la matemática en general y de la integral definida, en particular.
- Permite elaborar y poner de conocimiento a las autoridades de la Dirección de Educación Básica para Estudiantes con desempeño Sobresaliente y Alto Rendimiento (DEBEDSAR) del Ministerio de Educación, un Programa Aplicativo o secuencia didáctica, para que sea implementada a partir de procesos planificados; promoviendo actividades significativas en la asignatura de matemática, y establecer conexión entre el objeto materia de esta investigación (la integral definida) con otras áreas del conocimiento afines, de acuerdo a las necesidades e intereses de aprendizaje de los estudiantes.
- Tiene como propósito potenciar el talento y la formación holística de los estudiantes de la red COAR, y básicamente de proveerles de elementos

necesarios para que su desempeño en la educación superior y vida profesional sea exitosa.

1.5. Objetivos de la investigación

1.5.1. Objetivo general

Demostrar la influencia de la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema en la comprensión de la integral definida en estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.

1.5.2. Objetivos específicos

a) Precisar la influencia de la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre la dimensión conocimiento y comprensión, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.

b) Conocer la influencia de la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre la dimensión comunica y representa, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.

c) Experimentar la influencia la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre la dimensión resolución de problemas, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.

1.6. Fundamentación y formulación de las hipótesis.

Diferentes investigaciones han comprobado que las estrategias metodológicas bien diseñadas, implementadas y evaluadas permiten alcanzar los niveles de logro de las competencias matemáticas, traducidas estas en aprendizajes significativos por parte de los estudiantes en la asignatura de matemática en general y de la integral definida en particular.

Al respecto, Maurtua, J. (2015), constató que el mejoramiento de los niveles de logro en la construcción del concepto de la derivada es por la aplicación de la estrategia metodológica basada en la razón de cambio en los estudiantes de 5to grado.

Por su parte, Cruz, J. (2015) destaca que el empleo de la propuesta didáctica basada en el aprendizaje colaborativo relacionado al tema de la integral definida, facilita el aprendizaje de los estudiantes y promueve una motivación intrínseca lo cual conduce a un incremento del rendimiento académico.

1.6.1. Formulación hipótesis general

La aplicación de estrategias metodológicas basadas en acción proceso objeto esquema, mejora la comprensión de la integral definida en estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna - Perú 2018.

1.6.2. Formulación de las hipótesis específicas

a) La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión conocimiento y comprensión, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.

b) La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión comunica y representa, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.

c) La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión resolución de problemas, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.

1.7. Identificación de las variables

1.7.1. Variable independiente

Estrategias metodológicas basadas en acción, proceso, objeto y esquema.

1.7.2. Variable dependiente

Comprensión de la integral definida.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1. Marco epistemológico de la investigación

2.1.1 La comprensión de los conceptos matemáticos

Concebimos el proceso de comprensión como un conjunto de procesos que acontece en la mente del estudiante y que se forma a partir de una secuencia de actividades de aprendizaje en el aula, que conllevan a su vez varios procesos mentales. Para entender mejor qué sucede exactamente, es necesario tener un mayor conocimiento teórico de lo que ocurre en la mente del estudiante, para crear y provocar de manera intencionada ciertas reacciones en él. Los conceptos de esquema y representaciones externas e internas los podemos encontrar analizados y relacionados en la actualidad a través de los aspectos teóricos acerca de la representación semiótica – como sistemas- y sus implicancias en la interacción y relaciones entre representaciones internas. Bajo ese análisis, es necesario una primera aclaración y distinción respecto a los diferentes tipos de objetos, que según Duval (2004) son los siguientes:

- Objetos físicos (podemos tocarlos, actuar en ellos).
- Objetos fenomenológicos (tamaño, color... No se pueden tocar, separar).
- Objetos del conocimiento (caracterizados por ser invariantes. Los hay en física, biología, matemática, entre otras).

Además de considerar el aporte de Duval (2006), en la que afirma que; no hay conocimiento sin representación.

En ese sentido, es necesario identificar que existe una brecha entre lo disciplinar del conocimiento matemático y el conocimiento en otras ciencias (como pueden ser la astronomía, la física, la biología o la botánica, entre otras); ya que el primero se refiere a que los objetos de las Matemáticas son objetos mismo del conocimiento, en la que generalmente no se tiene ningún acceso perceptivo o instrumental a estos, ni siquiera a los más elementales (No podemos verlos, ni estudiarlos a través de un microscopio, ni tomar una fotografía de ellos) y, tal y como señala Duval (1993, Capítulo 2: Marco teórico de la investigación 44 A. S. González-Martín 1995), consideramos que es importante hacer una distinción entre un objeto matemático y su representación es fundamental para la comprensión de las matemáticas, pues los objetos del conocimiento no son accesibles a través de datos físicos ni evidencias sensoriales o instrumentales (Duval, 2004; Artigue, 1999). Por tanto, el uso de las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático es absolutamente necesario para conseguir obtener una comprensión de las Matemáticas. Pero los registros semióticos no solamente tienen la función de exteriorización o comunicación de las representaciones mentales; si no que, son fundamentales para el funcionamiento cognitivo y para la conceptualización del objeto matemático. Sin embargo, la enseñanza tiende a reducirlos al rol de exteriorización y comunicación. Al respecto, una de las formas de explicar cómo se produce la construcción de los conceptos matemáticos consiste en hacer uso de los registros de representación y promover las articulaciones entre las representaciones de esos registros, pues una de las ideas fundamentales es que las representaciones de los objetos matemáticos tienen un enfoque parcial en relación a lo que representan.

En consecuencia, contar con actividades de conversión de al menos dos registros de representación se vuelve una tarea fundamental para que las representaciones que por su naturaleza son complementarias, sean el soporte en la construcción del concepto matemático abordado. Desde el enfoque de la resolución de problemas del contexto –enfatizado en el Currículo Nacional- este cobra importancia porque permite la construcción de una red de conocimientos que posibilita a los estudiantes interactuar entre su conocimiento conceptual y el procedimental. Por ejemplo, cuando se realiza el tratamiento de la resolución de una ecuación de segundo, se debe interpretar la solución de la ecuación no como una mera solución, sino, entender que gráficamente, este representa el punto de corte entre la parábola que origina una función -con regla de correspondencia similar a la ecuación de segundo grado- con el eje de las abscisas del plano cartesiano. Además, interpretar la relación entre la discriminante negativa con la gráfica de la parábola y la comprensión de los números complejos. En ese sentido, según

Robert y Speer (2001), los estudiantes deben ser capaces de resolver problemas que no sean meras copias de los problemas que se les ha mostrado.

2.1.2 La comprensión del concepto en el Programa del Diploma del Bachillerato Internacional

En los programas de la Organización del Bachillerato internacional (OBI) se implementa el Programa del Diploma (PD), cuyo plan de estudio es desarrollado por los estudiantes del 4to y 5to grado de los COAR; materia de investigación en la presente tesis. Dentro de sus ejes pedagógicos considera que la comprensión conceptual constituye un eje fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, en ese sentido, la "educación se sustenta en la transformación de la comprensión personal y la construcción colaborativa de significados; más que, en la transmisión de conocimientos y la memorización de información" (OBI, 2014, p.16).

En virtud de ello, "un concepto es una idea importante, un principio o una noción perdurable cuya importancia trasciende sus orígenes, disciplinas o marcos temporales… Constituyen el móvil para la indagación de los estudiantes sobre cuestiones e ideas de importancia personal, local y global, así como los medios para explorar la esencia de una asignatura" (Idem). En ese orden de ideas, "los conceptos y su comprensión tienen un sitial preponderante en la estructura del conocimiento, para ello, se requiere que los estudiantes demuestren niveles de pensamiento; que están más allá, del uso de datos, temáticas y fórmulas orientados la comprensión y la obtención de buenos resultados en sus estudios posteriores y en la vida en general. Una adecuada exploración de la comprensión conduce a los estudiantes manejar ideas complejas, incluida la capacidad de transferir y aplicar ideas y habilidades en situaciones nuevas…" (OBI, 2014, p.16).

Gradualmente, "los alumnos profundizan su comprensión conceptual enfocando los conceptos desde diversas perspectivas, abarcando formas de pensar, inspirar una variedad de experiencias y abrir puertas a un aprendizaje interdisciplinario estimulante y de gran pertinencia" (Idem). En ese sentido, cuanto más actividades realizan los estudiantes para profundizar la comprensión, estos permitirán ser utilizados en diversos contextos para resolver problemas, abordar desafíos de manera innovadora o creativa.

Agregando a lo dicho, “la comprensión de conceptos fomenta el pensamiento de orden superior de los alumnos y los ayudan a conectar los datos y los temas con una comprensión conceptual más compleja. Además, generan una sinergia intelectual” (Erikson, 2007, p.70); y “ofrecen puntos de contacto para transferir conocimientos y comprensión entre distintas disciplinas” (Idem). El mismo Erickson (2007) sostiene que “los currículos basados en conceptos son tridimensionales porque se centran en conceptos, datos y habilidades, mientras que los currículos tradicionales son bidimensionales porque consideran solamente datos y habilidades. Los modelos curriculares basados en conceptos valoran la indagación de los alumnos y las experiencias en las que ellos mismos crean significados personales mediante el establecimiento de conexiones y la aplicación de su aprendizaje en situaciones desconocidas” (p. 72-78).

En resumen los programas del OBI a través de la implementación de experiencias pedagógicas centradas en la comprensión de conceptos posibilitan a los estudiantes, “a) Procesar conocimientos fácticos a un nivel intelectual más profundo, puesto que relacionan los datos con conceptos y comprensiones conceptuales esenciales; este pensamiento sinérgico (la interacción entre el pensamiento fáctico y el conceptual) estimula el intelecto en dos niveles —fáctico y conceptual— e incrementa la retención de los conocimientos fácticos, dado que el pensamiento sinérgico requiere un procesamiento mental más profundo. b) Crear pertinencia personal, puesto que los alumnos relacionan los conocimientos nuevos con los conocimientos previos, y fomenta la comprensión de culturas y entornos en los diversos contextos globales mediante la transferencia de conocimientos. c) Mejorar la fluidez lingüística, puesto que los alumnos usan la información fáctica para explicar y apoyar su comprensión conceptual más profunda. d) Alcanzar mayores niveles de pensamiento crítico, creativo y conceptual, puesto que los alumnos analizan desafíos globales complejos, tales como el cambio climático, los conflictos internacionales y la economía mundial” (OBI, 2014, p.17).

2.1.3. Los sistemas de representación de los conceptos matemáticos y el aprendizaje

Las recientes investigaciones están centrando su atención en el estudio de las diversas representaciones, concretas o abstractas (mentales), que son necesarias para dar el significado correcto a los conceptos matemáticos, materia de estudio. En ese sentido, Macias (2014) señala que, "una de las características importantes de la actividad matemática es la diversidad de registros de representación semiótica que hay que movilizar en la enseñanza y aprendizaje de un determinado concepto u objeto matemático". Por su parte, Dreyfus (1991), señala que la comprensión del concepto, se da como "una larga secuencia de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales"; en tales procesos predominan las construcciones que permiten establecer una relación entre los procesos inmersos en el aprendizaje de los estudiantes y las distintas representaciones de tipo mental (o internas) y las externas relacionadas a las representaciones externas del conocimiento: gráficos, números, símbolos, tablas, sólidos geométricos, entre otros.

Para Janvier (1987), el aprendizaje es un proceso que acumula la experiencia del estudiante, basado en la capacidad de realizar el tratamiento de diferentes representaciones enriquecedoras, esta posición concuerda con lo planteado por Davis (1982) que señala: "La representación puede ser una combinación de algo escrito en papel, de algo existente en forma de objeto físico, y de un arreglo cuidadosamente construido, de una idea en la mente ". De este modo el proceso de aprendizaje exige que el estudiante pueda establecer relaciones entre las diversas formas de representación matemática: modelos, diagramas, lenguaje verbal y símbolos escritos, y tener la capacidad para transitar de una representación a otra.

En ese sentido Lech, R (1987), destaca que "una de las formas de determinar las dificultades de aprendizaje, o de crear oportunidades de enseñanza, es que el docente genere una variedad de cuestiones presentando las ideas en una de las formas de representación y posteriormente interrogue a los estudiantes sobre como ilustrar, describir o representar en otra forma" (p.29) .

Entonces, las representaciones parten del sistema cognitivo cuyo papel principal es la simbolización. Ello implica que el estudiante tenga la capacidad para entender que un objeto (sea cual fuera su naturaleza) está representando a otro. Por ejemplo; el número, una función, una gráfica, sólido geométrico, entre otros, representan a un objeto matemático.

En la misma dirección Hitt, F. (2003), destaca el papel que tienen las diferentes representaciones matemáticas para la comprensión de un concepto; al respecto señala que: “sabemos que las representaciones de un concepto matemático, solo representan una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que nos permitirá su construcción. Es decir, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en cuestión” (p. 213).

2.1.4. La teoría de Duval sobre los registros semióticos

De acuerdo a las consideraciones teóricas de Duval (2004) citado por Aranda (2015), señala que “para la construcción de conceptos matemáticos, señala que no basta solo trabajar las actividades dentro de un solo sistema de representación, sino que hay que realizar las tareas de conversión de una representación a otra; estas las que favorecerán la construcción de los conceptos matemáticos. En ese orden ideas Duval (2000) agrega que aprehender un objeto matemático significa coordinar los distintos sistemas de representación semióticos” (p.21).

Por otra parte, Duval (2000) citado por Aranda (2015), nos señala una diferencia entre las representaciones semióticas y las representaciones mentales. Al respecto, dice que “las mentales se refieren al conjunto de imágenes y más generalmente a las concepciones que tiene cada individuo sobre un objeto, una situación y sobre lo que les está asociado. Mientras que las semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significado y funcionamiento. Entre las representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes se encuentran las figuras geométricas, los enunciados en lenguaje natural, las formulas algebraicas y gráficas" (p.63).

El desarrollo de las representaciones internas o mentales depende de cómo se interioriza las representaciones semióticas, ya que solo estas permiten realizar algunas funciones cognitivas esenciales, como el tratamiento. Duval (2006) afirma que para el aprendizaje (actividad) de la matemática es fundamental movilizar más de un registro de representación semiótica-gráficas, figuras, símbolos, lenguaje verbal, entre otros-, en el desarrollo de una sesión de clase, para tener una gama amplia de elegir un registro; que al parecer resulta una condición necesaria recurrir a varios registros, para poder reconocerlos en cada una de las representaciones. Es en ese sentido, que la combinación de varios registros de representación semiótica asegura la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos y por ende el aprendizaje de la matemática. Respecto a los signos y representaciones en matemáticas, según Duval (2006a) citado por Macias (2014), "no tienen como función de comunicar o evocar algún objeto ausente, sino transformar una representación en otras, permitiendo así nuevas informaciones, propiedades y extraer nuevos conocimientos de los objetos y conceptos representado" (p.32).

En ese sentido Duval (2006), señala que "no hay conocimiento sin representación" (p.58) y que al hablar de "representaciones" es necesario considerar 4 aspectos: "a) El sistema en la cual se produce la representación. En el caso de los objetos matemáticos son sistemas de signos, sistemas semióticos, y el contenido de la representación de un objeto cambia de acuerdo con el sistema de representación utilizado para su producción. El pensamiento humano necesita movilizar distinto sistemas de representación de producción y coordinarlos. b) La relación entre la representación y el objeto representado**.** Hay dos clases de sistemas de representación de producción: por una parte aparatos físicos y organizaciones neuróticas (imágenes físicas y mentales) y por otra sistemas semióticos (palabras, símbolos, dibujos). En este caso la relación es solo de notación. c) La posibilidad de un acceso al objeto representado, aparte de la representación semiótica. Hay dos tipos de representaciones: las que son una evocación de lo que ha sido realmente percibido, o podría serlo, y sus representaciones; y las que lo son de objetos que no pueden ser percibidos, como los objetos matemáticos. Y d) La razón por la que el uso de la representación es necesario. Principalmente para comunicación o para procesamiento (cálculo expansión discursiva)" (Aranda, 2015, p.65).

En ese sentido, un sistema semiótico debe permitir realizar 3 actividades cognitivas vinculadas a toda representación, entre ellas tenemos: "a) Formación de una representación identificable como una representación de un registro dado, lo que supone una selección de rasgos de datos en el contenido a representar. b) El tratamiento de una representación, o transformación de la representación en el mismo registro donde ha sido formada, de acuerdo con las reglas de dicho registro. c) La conversión de una representación, o transformación de la representación producida en un registro en otra representación en otro registro, conservando todo o solo una parte del significado de la representación inicial" (Aranda, 2015, p.65).

En ese sentido Duval (1993), citado por Aranda (2015) señala que "en la fase de aprendizaje la conversión juega un papel esencial para la conceptualización, pero que en la enseñanza tradicional solo tiene en cuenta las dos primeras actividades cognitivas, formación de una representación y tratamiento. Así, ya que la conceptualización implica una coordinación de registros, no se puede limitar la enseñanza de la matemática al mecanicismo del tratamiento o a la comprensión de las nociones, sino que se debe apostar por el trabajo con los diferentes registros de representación puestos en juego en estos tratamientos y conversiones" (p.65). Así mismo, "ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas de estos registros, posibilita que los estudiantes organicen sus conocimientos y se considera una condición necesaria para el aprendizaje" (Idem).

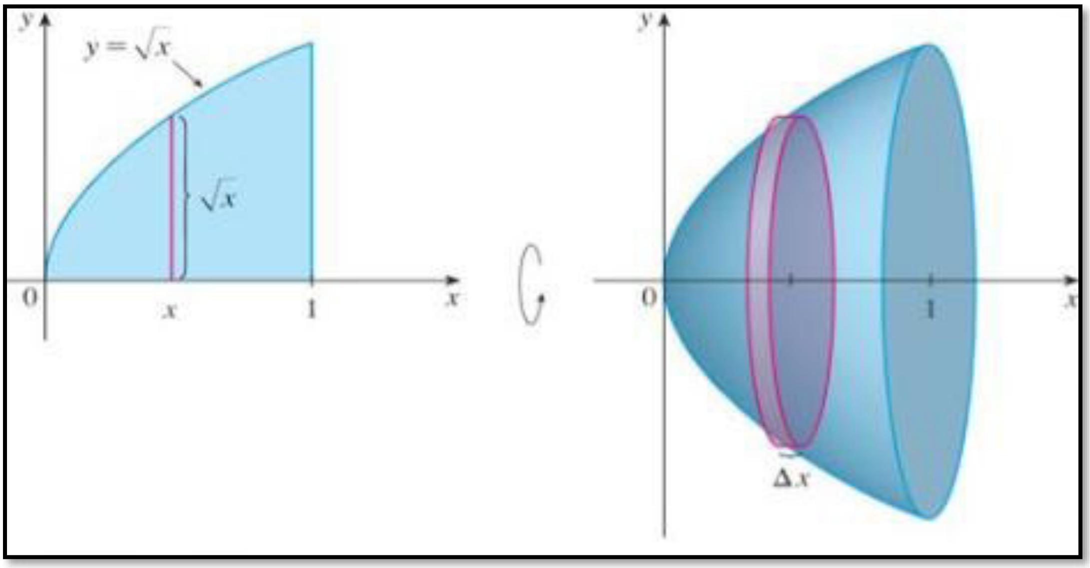
En consecuencia, "un aspecto importante que favorece el proceso de conectar varias representaciones, tanto de los problemas como de los objetos matemáticos que intervienen en su resolución, es dar la oportunidad a los estudiantes de reflexionar sobre la información que cada representación suministra de cara a discutirla y relacionarla con otros sistemas de representación" (Santos, 2000, p.55).

De acuerdo al análisis realizado, las representaciones matemáticas que se pueden mencionar y describir son las siguientes:

- Gráficos cartesianos.- Es la representación del plano cartesiano en 2 o 3 dimensiones. Permiten representar funciones, gráficos estadísticos y objetos geométricos para su análisis e interpretación en relación al contexto de trabajo.

Por ejemplo, cuando queremos hallar el volumen de un sólido de revolución formado alrededor del eje X, convendría esbozar en primer lugar la región delimitada por la función $f(x) = \sqrt{x}$, , la recta x=1 y el eje de las abscisas. Además identificar el giro de esta, 360º alrededor de uno de los ejes; así como determinar el radio y la altura de la rebanada de forma cilíndrica que permitirán hallar el volumen del solido de revolución mostrado.

Grafico 6. **Volumen de un sólido de revolución**



Fuente. Stewart, J. (2008)

- Tabla de valores.- Organizan la información referida a la variable dependiente y dependiente y su relación existente entre ellas. Por ejemplo, a partir de estas tablas, los estudiantes determinan la regla de correspondencia que relaciona los datos de la primera y segunda columna, los cuales podrán ser expresados de forma simbólica. En ese sentido, estas formas de representación son antecedentes importantes en el tratamiento de la integral definida.

Tiempo (x)	Cantidad de agua en litros (y)
1	8
2	11
3	14
4	17
…	…

- Expresión algebraica.- Es una ecuación que indica la correspondencia entre las variables o la representación de un objeto matemático formalmente.

$F(x)=\int_a^x f(x)dx;$ es derivable, entonces $F'(x)=f(x), \forall x \in (a,b)$

- Expresión verbal: Es el lenguaje común formal, que se utiliza para representar diversas situaciones del contexto real o matemático que pueden modelarse en cualquiera de los otros registros. Tal es el caso, cuando nos referimos a un automóvil que transita por una carretera sin pendiente con una velocidad de 20 m/s, y de pronto frena intempestivamente.

Grafico 7. Velocidad del automóvil con modelo $v(t)=\sqrt{400-25t^2}$

Fuente. Recuperado (28/10/2018) de: https://www.prensalibre.com/vida/tecnologia/cuales-seran-las-tendencias-tecnologicas-en-los-automoviles-para-2017

A partir de ese instante, cuando el tiempo es cero (t=0) y la velocidad del coche desciende; está, se modela a través de la función: $v(t)=\sqrt{400-25t^2}$ m/s.

Compruebe que el automóvil se detiene los 4 s.

Finalmente, tal como lo refiere Macías, J. (2014), "Lo verdaderamente importante en la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación, pues nunca nos permitirá apreciar todas las propiedades del objeto. Lo importante es lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos, y de que empleen aquellas que les permitan entender mejor los conocimientos puestos en juego, evitando así el establecimiento y creación de muchos obstáculos en el progreso de la comprensión del alumno".

2.1.5. Competencia matemática: resolver problemas en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio

Resolver problemas en las situaciones planteadas "implica la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados y poder usar e involucrarse con las matemáticas" (Pisa-OCDE, p.12).

Para Freudenthal, "hacer matemática (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado. Para él, el énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de algoritmización, no en el álgebra sino en la actividad de algebrizar, no en las abstracciones sino en la acción de abstraer, no en la forma y la estructura sino en formalizar y estructurar" (Bressan, A. & Zolkower, B. & Gallego, F., 2004, p.3).

En ese sentido, la competencia matemática implica "formas de actuar y pensar matemáticamente en diversas situaciones que permitan al estudiante interpretar e intervenir en la realidad a partir de la intuición, el planteamiento de supuestos, inferencias, deducciones, argumentaciones y demostraciones, comunicarse y otras habilidades, así como el desarrollo de métodos y actitudes útiles para ordenar, cuantificar y medir hechos y fenómenos de la realidad e intervenir conscientemente sobre ella" (Minedu, 2015, p.11).

En consecuencia, la competencia matemática según lo planteado por López (2015) se evidencia cuando el estudiante muestra idoneidad en:

- "Usar el lenguaje matemático para comunicar sus ideas o argumentar sus conclusiones; es decir, para describir elementos concretos, referidos a contextos específicos de la matemática, hasta el uso de variables convencionales y lenguaje funcional.

- Cambiar de punto de vista dentro de un problema dado.
- Captar cuál es el nivel de precisión adecuado para resolver un problema.
- Identificar estructuras matemáticas dentro de un contexto (si es que las hay) y abstenerse de usar la matemática cuando esta no es aplicable.
- Tratar la propia actividad matemática como materia prima para la reflexión, con miras a alcanzar un nivel más alto de pensamiento" (p.58-89).

Finalmente, la competencia matemática se define como "el conjunto de actividades mentales u operaciones intelectuales que llevan al estudiante a entender y dotar de significado a lo que le rodea, resolver un problema sobre conceptos matemáticos de regularidad, equivalencia y cambio, tomar una decisión o llegar a una conclusión, en los que están involucrados procesos como la abstracción, justificación, visualización, estimación, entre otros" (Idem, p 59).

En esta investigación tomamos las definiciones dadas por el currículo nacional (2016) como punto de partida para establecer las competencias y capacidades que los estudiantes de los COAR deben desarrollar en el proceso pedagógico. En ese sentido, la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, está estrechamente vinculado al tema de investigación, porque "consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades, y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello, plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también, razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos". (Minedu, 2016, p. 136).

Siguiendo la coherencia lógica de los elementos del currículo que desarrollan los estudiantes, señalamos las definiciones de las capacidades a desarrollar en el área de matemática.

- Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas.

"Significa transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica (modelo) que generalice la interacción entre estos. Implica también evaluar el resultado o la expresión formulada con respecto a las condiciones de la situación; y formular preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión". (Idem, p.136).

En niveles complejos, la capacidad exige: definir las variables y condiciones de una situación; plantear el problema a partir de una situación del contexto o de un modelo formal; y, comprobar, comparar y evaluar si los resultados obtenidos en las expresiones numéricas formuladas (modelo) cumplen las condiciones iniciales del problema.

- Comunica su comprensión de las relaciones algebraicas.

"Significa expresar su comprensión de la noción, concepto o propiedades de los patrones, funciones, ecuaciones e inecuaciones estableciendo relaciones entre estas; usando lenguaje algebraico y diversas representaciones. Así como interpretar información que presente contenido algebraico". (Idem, p.136).

Así como, diversas representaciones estándar (relaciones entre variables) o propias, que le permiten estructurar, documentar y explicar sus reflexiones para apoyar la argumentación y estrategias de resolución de problemas; así como, producir representaciones propias de objetos matemáticos, utilizando un lenguaje matemático apropiado.

- Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.

"Selecciona, adapta, combina o crea procedimientos, estrategias y algunas propiedades para simplificar o transformar ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas que le permitan resolver ecuaciones; determinar dominios y rangos; y, representar rectas, parábolas y diversas funciones". (Idem, p.136).

Todo ello demanda el uso de procedimientos matemáticos formales y complejos; la evaluación y verificación de los procesos de solución; el uso de variables y expresiones algebraicas, ecuaciones o funciones; así como también, la reflexión sobre los medios y limitaciones de los procedimientos; y los entornos virtuales y herramientas matemáticas empleadas.

De todo lo expuesto, la evaluación de los aprendizajes como proceso permanente y flexible se reviste de mucha importancia, en el sentido que permiten establecer de manera objetiva la realidad del rendimiento académico de los educandos, tanto de manera sistemática y continua, utilizando instrumentos pertinentes al término de cada ciclo educativo. Para ello, se debe tener una visión holística sobre el logro de los aprendizajes; es decir; también es necesario observar, analizar y caracterizar los procesos, a través de una evaluación sistemática, criterial, de los parámetros o factores que determinan la calidad de los aprendizajes, tales como recursos, procesos, servicios, entre otros. En ese sentido, siendo el currículo de los COAR por competencias, la evaluación de la asignatura se basa en criterios que determina el logro del desempeño de las competencias señaladas líneas arriba. Enseguida se describe cada criterio de evaluación, tal como se indica en el Documento de Trabajo sobre las Orientaciones para la Evaluación de los Aprendizajes (Minedu, 2018, p.3).

- Conocimiento y comprensión.

Recoge información respecto a los niveles de conocimiento y comprensión que van adquiriendo los estudiantes. Está referido a los procesos de traducción de un problema de contexto real, cotidiano o científico a una forma propiamente matemática; que permita formular y usar un modelo matemático para la construcción de estructuras matemáticas; así como también, conceptualizar, elaborar suposiciones y/o la formulación de un modelo de acuerdo al contexto, utilizando diferentes registros de representación matemática.

- Comunica y representa

Recoge información sobre el desarrollo de la capacidades para comunicar información, ideas, procesos y resultados en lenguaje matemático, empleando gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos, evidenciando la comprensión del concepto del objeto matemático.

- Resolución de problemas.

Recoge información sobre un conjunto de acciones caracterizadas por la búsqueda, selección, elaboración y adaptación de estrategias heurísticas y procedimientos matemáticos de forma flexible y eficaz para la resolución de problemas del contexto real o matemático del estudiante, utilizando para ello, diferentes registros de representación matemática y recursos materiales y tecnológicos pertinentes.

- Indagación.

Recoge información sobre los procesos de investigación y aplicación de la matemática en situaciones reales del estudiante. Evidencia el logro de las capacidades relacionadas al análisis, razonamiento, argumentación y la evaluación de los resultados obtenidos. Ello implica, identificar y reconocer el nivel de logro de los alumnos para indagar, formular inferencias, explorar, organizar información, formula hipótesis y desarrollar procedimientos para validarlas y aprobarlas, además de establecer conclusiones respetar la probidad académica.

Esta revisión de las competencias, capacidades y criterios de evaluación de la asignatura nos plantea la necesidad de armonizar los elementos conexos en los instrumentos de evaluación, tal como se evidencia en el pre test y post test de la presente investigación.

2.1.6. Procesos del pensamiento matemático avanzado (PMA)

Muchas investigaciones sobre la enseñanza de la matemática han centrado su atención sobre como los estudiantes comprenden conceptos básicos de matemáticas. Actualmente el estudio de estos procesos están abarcando el currículo de las universidades y de los COAR -como es nuestro caso-, para analizar la complejidad del desarrollo del pensamiento matemático avanzado, que según Dreyfus (1991) citado por Camacho, C., Azcarate C. y González, M., y Moreno, M. (2003), “comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales” (p.136). Entre ellos se encuentran la abstracción, definida como el proceso de sustituir los objetos concretos por conceptos, desarrollados en la mente del estudiante. Cabe precisar que el proceso de la abstracción no es un rasgo exclusivo de las matemáticas de nivel superior, así como el analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar y formalizar (Camacho y Ascarate, 2003, p.136); pero por la dinámica que se otorga a la progresiva matematización en el currículo del nivel superior, se hace imperiosa la necesidad desarrollar los procesos cognitivos de abstraer, definir, analizar y formalizar. De lo explicado, es necesario señalar que la diferencia entre la matemática avanzada y la básica o elemental, es el contenido y el tratamiento o la forma de controlarla; ello implica procesos mentales más potentes relacionados a la representación y la abstracción. Otras distinciones al comparar el pensamiento matemático avanzado y el elemental, según Garbín (2015); encontramos que en el pensamiento matemático elemental:

- “Se enseña una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
- Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
- Se enseñan conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
- Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.
- Se evalúa a los estudiantes en tiempo cortos y se reducen las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante” (Garbín, 2015, p. 140).

De lo revisado los docentes de matemática deben ser conscientes que los procesos matemáticos: representación, generalización, síntesis y abstracción contribuyen al desarrollo del PMA de los estudiantes. Esto nos plantea la necesidad de integrar en la planificación, actividades para ser implementadas dentro o fuera del aula a través de estrategias metodológicas adecuadas y bien diseñadas como se propone en la presente investigación.

2.2 Antecedentes de la investigación

En la enseñanza de la matemática en nuestro país, los tópicos del cálculo integral se desarrollan en la educación superior. La implicancia de ello, es que la producción bibliográfica y las investigaciones sobre el tratamiento metodológico sobre este objeto matemático, para estudiantes de la educación secundaria son escasas. Sin embargo, en el plano internacional se puede apreciar investigaciones que tratan de proponer algunas estrategias metodológicas como parte importante de la didáctica de la enseñanza aprendizaje del cálculo integral, pero siempre dirigido a un público universitario.

En ese sentido, daremos a conocer aquellas investigaciones que tienen los mismos propósitos y lineamientos que la presente tesis, respecto a la comprensión del "concepto de la integral definida".

2.2.1. Antecedentes internacionales

Aranda, M. (2015) sustentó la tesis titulada: *"Análisis de la construcción del concepto de la integral definida en estudiantes de bachillerato"* para obtener el grado de doctora en el departamento de innovación y formación didáctica, en la Universidad de Alicante.

En este trabajo de investigación se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

- "¿Cómo construyen estudiantes de bachillerato la aproximación del área de la superficie bajo una curva?
- ¿Cómo estudiantes de bachillerato construyen el significado de las sumas de Darboux?
- ¿Cómo construyen estudiantes de bachillerato el concepto de función integral?" (Aranda, 2015, p.155)

Para responder a estas cuestiones, la autora plantea el siguiente objetivo de investigación es "Analizar el proceso de construcción del concepto de la integral definida desde el enfoque de la abstracción reflexiva, en estudiantes de bachillerato (19-18) que participaron en un experimento de enseñanza constructivista" (Aranda, 2015, p.46).

Dentro de las conclusiones a las que arriba, se discute sobre las características de los perfiles de los estudiantes en relación a los distintos momentos de participación dentro del proceso de abstracción reflexiva y los baches de tipo mental o cognitivos que se presentan para transitar de un nivel de comprensión a otro en el momento de su participación. En ese sentido, el momento de proyección; consiste en que los estudiantes construyen algunos registros pero no pueden hacer algunas inferencias; por ejemplo, pueden subdividir los intervalos en subintervalos, pero no se evidencia el proceso de aproximar el área debajo de la curva. Mientras que en el momento de reflexión el estudiante es capaz de abstraer regularidades de los registros a partir de las actividades realizadas; por ejemplo, coordina representaciones para expresar las sumas superiores e inferiores del área debajo de la curva. Finalmente, el momento de antelación local tiene lugar cuando los estudiantes tienen la capacidad de aplicar lo aprendido a situaciones nuevas, por ejemplo, identificar dos formas de aproximación al área y coordinación entre ellas.

Como se puede observar la investigación describe como se realiza el proceso de construcción conceptual de la integral definida en estudiantes universitarios de 19 y 18 años; mientras que la nuestra propone estrategias metodológicas que ayuden a los estudiantes de secundaria cuya edad oscila entre 15 y 18 años a la comprensión del concepto de la integral definida.

Irazoqui, E. (2015), sustentó la tesis titulada: “El aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la modularización” para obtener el grado de Doctor en la Universidad de Salamanca.

La investigación que se desarrolla en nivel superior, tiene como pregunta de investigación “¿Existen diferencias significativas en el aprendizaje del cálculo diferencial entre estudiantes que cursan esta materia bajo un diseño curricular modular versus un modelo tradicional de enseñanza?” (p.36), para ello, en su hipótesis general de trabajo afirma que: “La implementación de un diseño curricular modular genera mayores aprendizajes en el cálculo diferencial, el cual se expresa en un mejor rendimiento académico final entre los estudiantes que cursan esta asignatura bajo esta modalidad de trabajo versus aquellos que lo hacen de manera tradicional” (p.36).

Las conclusiones a las que arriba esta investigación es que, “un mejor aprendizaje del cálculo diferencial es posible cuando la forma de implementar el curso en el aula se ciñe a un diseño curricular modular. En ese sentido, se pudo observar un mayor rendimiento académico en los estudiantes que cursaron la asignatura bajo el diseño curricular modular, respecto de aquellos que recibieron una enseñanza tradicional” (p.542).

Lo planteado por Irazoqui, guarda estrecha relación con la presente investigación, en el sentido que ambos plantean propuestas metodológicas que tienen como propósito mejorar el rendimiento académico en las cuales subyace la comprensión del concepto matemático, como es la integral definida en nuestro caso. Adicionalmente a lo mencionado la presente investigación ha validado un módulo sobre las estrategias metodológicas para la comprensión del “concepto de la integral definida” basadas acción, proceso, objeto y esquema, apoyadas con el uso de herramientas tecnológicas.

Cruz, J. (2015) sustentó la tesis titulada: “Una propuesta didáctica basada en aprendizaje colaborativo para aprendizaje del cálculo de volúmenes de sólidos de revolución”, para obtener el grado de Magíster en enseñanza de las matemáticas en la Universidad de Guadalajara.

En el trabajo se tuvo como objetivo fundamental analizar los efectos producidos por la implementación de una propuesta didáctica, sobre los procesos de aprendizaje para calcular el volumen de un sólido de revolución, en alumnos del Colegio Jarales inscritos en el 12 grado de bachillerato.

Dicha propuesta fue construida tomando como referente el marco teórico de los Registros de Representaciones Semióticas, metodología Enseñanza Libre de Improvisaciones (ELI) y el uso del software educativo Geogebra. Además, se diseñó y utilizó una página web, creada en la plataforma wix.com, para mediar el proceso de aprendizaje. Así mismo, se planteó como objetivo analizar los efectos que se observan al aplicar la propuesta desarrollada mediante la metodología ELI, con enfoque de aprendizaje colaborativo que permitan a los estudiantes calcular volúmenes de sólidos de revolución, con empleo del programa Geogebra. Las conclusiones a las que arriba el autor corrobora la hipótesis de trabajo: El empleo de la propuesta didáctica para el tema de integral definida en el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución facilita el aprendizaje por parte de los estudiantes de la clase de cálculo diferencial del Colegio Jarales.

La investigación realizada por Cruz guarda una estrecha relación con la nuestra, ya que en las estrategias metodológicas para desarrollar los procesos cognitivos acción, proceso, objeto y esquema nos apoyaremos de las diversas representaciones matemáticas, que en palabras de Duval (2000), si el estudiante tiene dominio de dos representaciones matemáticas habrá encapsulado o interiorizado la idea o el concepto en su esquema, entendiéndose con ello, el logro de un aprendizaje significativo.

Crisóstomo, E. (2012) sustento la tesis titulada: "Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional", para obtener el grado de Doctor en Didáctica de la Matemática en la universidad de Granada.

Es una investigación cualitativa cuyo problema de investigación según Crisóstomo (2012) se plantean a través de las siguientes interrogantes:

"¿Qué formación matemático-didáctica deberían recibir los profesores de matemática de secundaria para que puedan realizar su labor docente de la manera más idónea posible? ¿Cómo deberían diseñar, implementar y evaluar los procesos de formación de los profesores para el logro de dicho objetivo?" (p.16).

Frente la problemática identificada el autor afirma que "el proceso de estudio del cálculo integral en la enseñanza universitaria es complejo y su diseño e implementación en la formación de profesores de matemática debe tener en cuenta la reconstrucción cognitiva requerida por la transición de la matemática elemental hacia la matemática superior y los distintos significados de la integral" (p. 435). Así mismo que "los profesores-formadores consideran que los libros de textos de cálculo juegan un papel importante en los proceso de estudio del cálculo integral, y que estos son representativos en cuanto a los significados de la integral que deben ser implementados en el contexto de la formación de los profesores de matemático" (Ibidem, p.436).

Respecto a las conclusiones, el autor señala que "el proceso de estudio de cálculo integral en la enseñanza superior es complejo y su diseño e implementación en la formación de profesores de matemática debe tener en cuenta la reconstrucción cognitiva requerida para pasar de un nivel elemental de la matemática a otro de nivel superior" (Ibídem, p.435).

Señala además, que los estudiantes entran en conflictos al pasar de un pensamiento matemático elemental a otro más avanzado en las que abordan situaciones abstractas que requieren que ellos mismos realicen una construcción cognitiva de integral definida (secuencia lógica), en lugar de una excesiva algebrización que generalmente se dan en estos procesos.

La investigación de Crisóstomo pone en evidencia la complejidad de abordar la comprensión de la integral definida y la necesidad de realizar una construcción lógica del concepto de la integral definida para su eficiente comprensión. En esa dirección, la presente investigación guarda similitud con la tesis revisada en el sentido que proponemos una secuencia metodológica que se sustenta en la descomposición genética del concepto y los procesos cognitivos de acción, proceso, objeto y esquema de la integral definida.

Aldana, E. (2011) sustentó la tesis titulada: "Comprensión del concepto de la integral definida en marco de la teoría APOE" para obtener el grado de Doctor en la facultad de educación de la Universidad de Salamanca.

El ámbito en el que se ubica la investigación corresponde a la didáctica del análisis matemático y el campo del pensamiento avanzado. En esta se estudia "El desarrollo de la comprensión del concepto de la integral definida en estudiantes del tercer año de la licenciatura de matemática cuyo rango de edad esta entre 18 y 23 años". Para ello, después de valiosas reflexiones sobre tu tema de investigación el referido autor plantea las preguntas de investigación siguientes:

- "¿Cómo adquieren los estudiantes el concepto de la integral definida?

- ¿Cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de integral definida?
- ¿Qué relaciones y qué elementos matemáticos se manifiestan en cada nivel de desarrollo de la integral definida?
- ¿Cómo podemos caracterizar el paso de un nivel de desarrollo al siguiente?" (Aldana, 2011, p.55).

Para responder a esas cuestiones Aldana (2011), plantea como objetivo general "Estudiar el desarrollo del esquema del concepto de la integral definida que tienen los estudiantes universitarios en el marco de la teoría APOE" (p.56).

Las conclusiones a las que se llegó en esta investigación, después del análisis de los resultados de cada estudiante, organizado por niveles de desarrollo del esquema del concepto de la integral, según las relaciones lógicas (Sánchez-Matamoros, G., & García, M., & Llinares, S., 2013, p.299); fueron los siguientes: "a) La construcción del conocimiento es progresivo y continuo. b) El paso de un subnivel al siguiente se da por medio de las relaciones lógicas que el estudiante puede hacer con los elementos matemáticos que conoce y lo que sabe hacer con estos en la realización de las distintas tareas. En esa línea de trabajo, algunos elementos matemáticos son usados de forma incorrecta y/o concepciones erróneas; por ejemplo: b1) Realizar cálculos incorrectos al aplicar la regla de Barrow o el desconocimiento de las condiciones necesarias para aplicar esta regla. b2) una concepción incorrecta al asumir que el área de una región es equivalente a la integral definida. c) Algunos estudiantes tienen dificultades con las representaciones gráficas de algunas funciones. d) Falta de coordinación entre los registros gráficos y los algebraicos. e) Hacen poco uso del registro analítico, mostrando dificultades en la escritura de expresiones analíticas; así como en entender las tendencias, los límites y sucesiones. f) El subnivel de desarrollo que predomina en los alumnos es el INTER1. g) En el subnivel INTRA 1, hay un mayor uso de los registros gráficos y/o algebraicos y sólo en el nivel TRANS se alcanza la síntesis de las tres formas de representación: gráfica, algebraica y analítica. h) Cada sujeto presenta un esquema del concepto que varía de unos a otros por el tipo de relaciones lógicas que es capaz de establecer y los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que sabe utilizar. i) Realizar una “descomposición genética del concepto de la integral” definida, que sirva al profesor como desarrollar este concepto en la mente de los estudiantes (como lo aprende)”.

Las preguntas de investigación por resolver, según las consideraciones encontradas en el trabajo son: “a) ¿Cómo debe organizarse la enseñanza a partir de los resultados de esta investigación para mejorar el aprendizaje del concepto matemático? ¿Cómo podemos ayudar a los alumnos a superar aquellas dificultades y/o concepciones erróneas que tienen en relación con los elementos matemáticos que constituyen el concepto de la integral definida? b) Dado que el elemento matemático el área como límite de una suma, es aquel en que los alumnos muestran más dificultades por no tener encapsulado el concepto de límite como un objeto matemático ¿Cómo podríamos profundizar en su aprendizaje? c) Cómo planear un diseño curricular que permita construir los conceptos previos y adquirir un aprendizaje duradero de aquellos elementos matemáticos que configuran el concepto de integral definida? d) Cómo lograr que los estudiantes adquieran una construcción/comprensión de forma consciente de este concepto matemático?” (Aldana, 2011, p.401).

Como se puede observar la investigación describe como adquieren el concepto de la integral definida y cuáles son los niveles de desarrollo del esquema mental de los estudiantes; en ese sentido, la investigación se relaciona fuertemente con la nuestra, ya que en nuestro caso se propondrán estrategias metodológicas que ayuden a los alumnos a la construcción del concepto de la integral definida de manera significativa eficiente, que concuerda con las líneas de trabajo sugeridas en la tesis revisada.

Depool, R. (2004) sustentó la tesis titulada: “La Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en un Entorno Computacional. Actitudes de los Estudiantes Hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS)” para obtener el grado de Doctor en la Universidad de La Laguna. España.

En la investigación analiza las potencialidades y dificultades que se presenta con el uso del software DERIVE en el desarrollo de los cursos de cálculo para los estudiantes de ingeniería; así como el análisis de las actitudes de los estudiantes respecto al uso de las Tic's para el aprendizaje del cálculo.

Dentro de la investigación el autor propone las siguientes interrogantes:

- "¿De qué manera influye el uso de las nuevas tecnologías, en general, y DERIVE en particular, en las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas?
- ¿Existen modificaciones en las actitudes de los estudiantes cuando son inmersos en un programa de formación con un PCS particular?
- ¿Qué potencialidades y dificultades surgen con la introducción de DERIVE como recurso didáctico en los cursos de iniciación al Cálculo?
- ¿Qué obstáculos, dificultades y errores genera la relación del concepto de área asociado al concepto de Integral Definida?
- ¿Qué nivel de comprensión poseen los estudiantes del concepto de integral después de realizar la instrucción utilizando el PCS DERIVE?" (Depool, 2004, p.49).

Bajo esas cuestiones la investigación propone 3 objetivos generales: "a) Diseñar, implementar y evaluar un módulo instruccional, basado en un conjunto de Prácticas de Laboratorio, utilizando el Programa de cálculo Simbólico DERIVE para la enseñanza del concepto de Integral Definida, para estudiantes de un primer curso de ingeniería. b) Analizar la influencia que posee el uso de un Programa de Utilidades específico, en el que se enfatizan los aspectos de aproximación desde la perspectiva gráfica y numérica, en la comprensión de la Integral Definida. c) Analizar las actitudes hacia las matemáticas, el uso de los ordenadores y el aprendizaje con DERIVE de los estudiantes, cuando son inmersos en un plan de enseñanza que utiliza herramientas tecnológicas como elemento básico para su aprendizaje" (Depool, 2004, p.49).

Como se puede notar la investigación analizada tiene como propuesta el diseño, implementación y evaluación de un módulo instruccional usando las Tic's para el aprendizaje y la enseñanza del concepto de la integral; la nuestra pretende "Comprobar que las estrategias metodológicas basadas en acción, proceso, objeto y esquema, permiten mejorar el nivel de logro en la comprensión del concepto de la integral definida…"; ambas investigaciones subyacen en el terreno de las propuestas didácticas del cálculo integral.

Mendoza, M. (2003) sustentó la tesis titulada: “Representaciones de la derivada de una función” para obtener el grado de maestro en ciencias con orientación en matemática, en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo en México. En el trabajo se llegaron a las siguientes conclusiones:

- “Los estudiantes no están acostumbrados a resolver problemas en forma independiente: inicialmente buscan la afirmación o negación del investigador, con lo que muestran inseguridad en sus respuestas, y finalmente, se involucran en la solución de la situación didáctica.
- En la etapa de acción, se observó que los estudiantes tienen mayor dificultad en el tratamiento de las representaciones gráficas y numéricas de la primera y segunda derivada de una función dada. Así mismo, los estudiantes trabajan mejor en lo algorítmico que en lo visual-gráfico, mostrando que sus conocimientos en álgebra son predominantes en el curso de cálculo diferencial.
- En el aspecto numérico, en donde se puede observar la variación de funciones, los estudiantes fijan la atención en los valores numéricos de la función, de tal manera que ello les impide responder adecuadamente a preguntas relacionadas al comportamiento de la derivada en puntos específicos.
- Al finalizar la investigación existe un cambio favorable, observando que comunicamos el comportamiento de la derivada en sus diferentes representaciones a los estudiantes por medio de la situación didáctica aplicada, obteniendo mayor interés en los estudiantes para involucrarse en el tema.
- Así mismo, se observó conciencia crítica en la construcción del conocimiento y un mayor dominio de los temas del cálculo diferencial. El trabajo en equipo y la discusión grupal les permitió hacer suyos los conceptos que no tenían claros e incorporar otros” (Mendoza, 2003, p.110-112).

Esta investigación tiene la misma intencionalidad de la presente tesis, es decir, ambas proponen estrategias metodológicas o secuencias didácticas que permiten comprender cabalmente el concepto de la derivada y de la integral definida como es en nuestro caso.

Planchart, O. (2002), sustentó la tesis titulada: "La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función", para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos de México.

Las conclusiones a las cuales arriba son las siguientes:

"1. Sobre las dificultades que se presentan en tareas de tratamiento y conversión de los sistemas de representación del concepto de función.

- Se observó que los estudiantes tuvieron dificultades con la notación simbólica de la función. Algunos interpretaron la función como si fueran operaciones de multiplicar. Asimismo, algunos estudiantes multiplicaron a f por x. Tomaron a f(x) como una multiplicación y despejaron una de las incógnitas como si fuera una ecuación, es decir, no entendieron el uso de la notación de función.
- Los resultados de los cuestionarios evidenciaron que los estudiantes tienen dificultades en la conversión del sistema gráfico al sistema algebraico.

2. Las actividades de modelación promueven que el estudiante adquiera el concepto de función.

- Algunos estudiantes trasladaron los valores a tablas y otros prefirieron responder utilizando un diagrama de Venn. La modelización es una alternativa didáctica para que los estudiantes puedan coordinar los sistemas de representación. En esta propuesta se presentan diferentes elementos visuales, mentales, lógicos y de razonamiento que permiten distinguir conceptos y subconceptos" (Planchart, 2002, p. 163-169).

Así mismo recomienda lo siguiente:

- "Enfatizar el uso de distintas representaciones para la consecución del concepto de función. En ese sentido, se pueden incorporar metodologías y técnicas que respondan y faciliten los procesos de conversión entre representaciones.

- Incluir en los programas de precálculo aplicaciones del tema de funciones a partir de situaciones físicas, donde los estudiantes puedan entender la idea de función desde otro contexto.
- Preparar actividades de modelación de tal manera que los estudiantes puedan asimilar y lograr los distintos sistemas de representación del concepto de función.
- Incorporar la visualización como una herramienta didáctica que permita a los estudiantes acercarse a los objetos matemáticos y a la situación física particular y relacionarla a imágenes mentales adecuadas de tal manera que los acerquen al concepto.
- Recomendar el estudio de los procesos cognitivos que conlleven a la construcción de modelos a partir de la simulación de fenómenos físicos y geométricos y que, por otro lado, se analicen los sistemas de representación semiótica en este contexto". (Planchart, 2002, p. 170).

El acercamiento de esta investigación respecto a la presente tesis, radica en la aplicación de diferentes formas de representar el concepto de un objeto matemático a través de gráficos, tablas, expresiones algebraicas (ecuaciones) y verbales que articuladas promueven la construcción de conceptos como el de integral definida.

2.2.2. Antecedentes de estudios en el Perú

Maurtua, J. (2015), sustentó la tesis titulada: "Aplicación de estrategias metodológicas basadas en la razón de cambio en el mejoramiento del nivel de logro en la construcción del concepto de la derivada. el caso de los estudiantes del quinto grado del Colegio Mayor Secundario Presidente del Perú"; para obtener el grado de Magíster en Educación matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

En ellas se plantea como objetivo de investigación, "Determinar el mejoramiento del nivel de logro en la construcción del concepto de la derivada mediante la aplicación de la estrategia metodológica basada en la razón de cambio en los estudiantes del 5to grado del CMSPP" (p.26); después de la aplicación de la estrategia metodológicas se arribaron a las siguientes conclusiones, que según el referido autor son:

- “Después de aplicar la estrategia metodológica de ECD-BRC, se constató que existen diferencias estadísticamente significativas en el nivel del logro de aprendizaje del grupo de estudiantes que recibió el tratamiento de la estrategia metodológica ECD- BRC, con respecto al grupo de estudiantes al que no se le aplicó dicho tratamiento.
- La estrategia metodológica ECD-BRC ha mejorado significativamente (no sólo en un sentido estadístico sino también pedagógico-didáctico), el logro de los aprendizajes de los estudiantes del CMSPP; además los estudiantes lograron superar la media (que fue de 32.81) del puntaje total (que fue de 53.55 puntos), siendo la evaluación de tipo criterial aplicado a los estudiantes” (p.175-176).

Como se puede observar nuestra investigación también propone estrategias metodológicas para la comprensión de conceptos matemáticos de nivel superior. La relevancia de estas propuestas es que responden a la falta de libros de textos con orientaciones para la comprensión de objetos matemáticos de alto nivel de complejidad, guías o instructivos de trabajo; y falta de capacitación al docente en el tratamiento de estos conceptos como pieza clave para desarrollar la indagación y el desarrollo de verdaderos problemas del contexto real.

Quintana, D. (2010), sustentó la tesis titulada: “Tratamiento didáctico de la derivada - la aplicación del programa Derive” para optar el Grado de Magister en educación en la Universidad de Piura.

A continuación, se presentan algunas conclusiones a las que se llegó en la investigación: “a) Se logró diseñar y presentar una propuesta metodológica, compuesta por un módulo de trabajo, guías y actividades de laboratorio, que fueron aplicadas al grupo experimental y que permitieron mejorar las calificaciones de los alumnos. b) La clase magistral sigue siendo importante y por tanto nada puede reemplazar al profesor, pero el uso de algún recurso tecnológico tal como el que se propone, complementaría esta labor, ya que se le pueden presentar al alumno situaciones (didácticas) no puramente algebraicas sino también intuitivas, gráficas, numéricas por lo cual lo aprendido se vea fortalecido” (Quintana, 2010, p.137).

En nuestra investigación en comparación con la de Quintana, también se plantean secuencias metodológicas que permiten mejorar los niveles de comprensión de la integral definida como concepto matemático. Así mismo, se destaca el papel del docente en el proceso pedagógico, para proponer diversas representaciones matemáticas y secuenciar la secuencia temática a través de una descomposición genética acorde al desarrollo cognitivo de los estudiantes que les permita la comprensión de conceptos matemáticos y encapsulados a través de construcciones mentales que son incorporados al esquema de los estudiantes.

Por su parte, Quintanilla, (2009), sustentó la tesis titulada: “Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOS” para obtener el Grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad de Católica del Perú.

Dentro de los objetivos de la investigación, el autor propone lo siguiente: “a) Diseñar situaciones asociadas al concepto de función y para cuyas soluciones sea necesario mostrar un dominio del tema a nivel de acción y proceso. b) Diseñar las actividades para la implementación y el desarrollo del ciclo ACE (Actividades con el programa ISETLW, discusión en clases y ejercicios). c) Realizar un estudio de caso con dos estudiantes para identificar los constructos mentales que poseen respecto a la concepción de función, teniendo en cuenta la descomposición genética” (Quintanilla, 2010, p.10).
Respecto a la hipótesis de trabajo afirma que: “A través del desarrollo del ciclo ACE, los estudiantes logran el tránsito de un nivel de prefunción a un nivel superior, respecto a la comprensión de la concepción del concepto de función” (Idem).

Dentro de las conclusiones se aprecia que el autor diseña una descomposición genética de la función (objeto matemático), un módulo que permite desarrollar el ciclo ACE y su correspondiente implementación, así como el planteamiento de diferentes situaciones problemáticas que parten del contexto; además concluye que; “a) El estudio indica que los estudiantes tienen dificultades en comprender el concepto de función; esto se evidencia en las respuestas dadas para las situaciones planteadas. Los estudiantes siguieron patrones preestablecidos, donde la abstracción reflexiva por parte de los estudiantes no fue relevante. b) En el tratamiento instruccional desarrollado en el ciclo ACE se empleó el programa ISETLW. Esto ha permitido a los estudiantes alcanzar un progreso en el desarrollo de su proceso de concepción del concepto de función, evidenciándose mejor en las situaciones nuevas que en las situaciones clásicas algebraicas. Por tanto, el ciclo ACE ha contribuido a que los alumnos que inicialmente se encontraban en el nivel de prefunción pudieran pasar al nivel de Acción, con tránsito al nivel de Proceso. c) Las respuestas que un estudiante brinda respecto a un determinado concepto matemático, podrían corresponder a diferentes niveles, según la descomposición genética. Por tanto, se tendría dificultad en asignarle un único nivel. Esto se debe a que el modelo de la Teoría APOS no es lineal. Ante nuevas situaciones el estudiante reformula sus concepciones" (Quintanilla, 2010, p. 80).

La investigación de Quintanilla también se relaciona a la nuestra, ya que diseña situaciones pedagógicas intencionadas para mejorar la comprensión de la función como objeto matemático, aproxima el nivel de comprensión de los estudiantes del concepto de función estableciendo una descomposición genética pertinente sobre el objeto matemático. Todos estos aspectos son considerados en la estrategia metodológica propuesta en la presente investigación; además, dar respuesta a la pregunta abierta que deja Quintanilla (2010) que dice: "¿Es posible desarrollar investigaciones relacionadas con conceptos de análisis matemático, que tienen como prerrequisito al concepto de función bajo la perspectiva de la Teoría APOS, luego de complementar el ciclo ACE propuesto en esta investigación?" (Quintanilla, 2010, p. 81).

2.3 Bases teóricas

2.3.1. Estrategias metodológicas

“Las estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje son secuencias integradas de procedimientos y recursos utilizados por el docente con el propósito de desarrollar en los estudiantes capacidades para la adquisición, interpretación y procesamiento de la información, y la utilización de estas, para la generación de nuevos conocimientos y su aplicación en las diversas áreas en las que se desempeña, promoviéndose los aprendizajes significativos” (Sardón, D., 2014, p.17). Las estrategias metodológicas en su diseño deben estimular a los estudiantes a observar, indagar, analizar, argumentar, plantear hipótesis, modelar, representar y descubrir conocimientos de manera autónoma. Además incluye una serie de métodos, materiales y recursos que el profesor hace uso en sus prácticas pedagógicas del día a día. Por ejemplo, una estrategia de enseñanza podría consistir en una clase magistral, o una conferencia, análisis y discusión de una lectura donde se identifica las ideas principales, completar un cuestionario o realizar un mapa mental o conceptual en forma individual o grupal por parte de los estudiantes.

En ese sentido, las estrategias metodológicas son diversas y tiene como finalidad que los estudiantes logren desarrollar aprendizajes significativos. En esa interacción, la estrategia puede ser modificada o cambiada de acuerdo a los resultados de aprendizajes esperados.

Según (Cózar, 2004, citado por Serna, G, 2013, p. 45) señala que “es evidente que en el aprendizaje no basta con la memoria mecánica como herramienta para la adquisición de un conocimiento ya acabado, hoy se insiste que el alumno debe comprender, o sea, dar significado personal a sus aprendizajes y que aprenda a aprender”. En ese sentido, la comprensión de un concepto matemático demanda dinamizar estructuras internas o mentales de menor a mayor complejidad, y coordine diversas representaciones del objeto matemático para establecer relaciones lógicas entre los conceptos matemáticos y sus diferentes representaciones.

El uso de estas estrategias por parte del estudiante genera los llamados estilos de aprendizaje que se pueden evidenciar cuando el estudiante resuelve un problema, realiza actividades de indagación, realiza proyectos articulados con otras disciplinas, usa herramientas y recursos tecnológicos, revisa una variedad de fuentes y respeta la probidad académica, usa notación y representación matemática adecuada, entre otros, que configuran un aprendizaje significativo y duradero.

Existen una variedad de estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, las mismas que están desarrolladas con el propósito de proponer el uso los diversos recursos que permitan atender los intereses, necesidades y habilidades de los estudiantes. Dentro de las estrategias consideradas en la presente investigación se pueden mencionar:

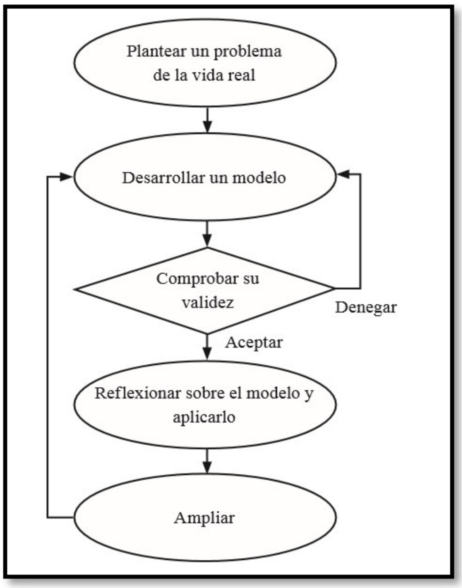
a) El aprendizaje basado en la modelación.

La modelación matemática es un proceso que conduce de una situación problema a un modelo matemático. La modelación implica la producción de modelos matemáticos que se logran estableciendo relaciones entre la situación real y las matemáticas; más específicamente, es la manera de conectar el mundo real con las matemáticas.

Al respecto, Peña, L. y Morales, J. (2016) señalan que; "Las investigaciones en modelación matemática y su relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, muestran que estos procesos son exitosos cuando los docentes utilizan los modelos como estrategia y componente central para abordar el currículo, no sólo en el aspecto académico sino que abarca aspectos actitudinales y de percepción positiva, dado que los estudiantes disfrutan más cuando la enseñanza involucra actividades de modelación matemática" (p.64).

En ese sentido, consideraremos a "… la modelación matemática no como un simple algoritmo elemental,… sino como un centro de interés que permita establecer importantes relaciones entre situaciones contextuales…, la formación de competencias necesarias para el desarrollo del pensamiento matemático y el pensamiento estratégico…." (Cruz, C. 2010, p.40). Para llevar a cabo la modelación matemática, se requiere transitar por una serie de procesos tales como se muestra en la siguiente gráfica;

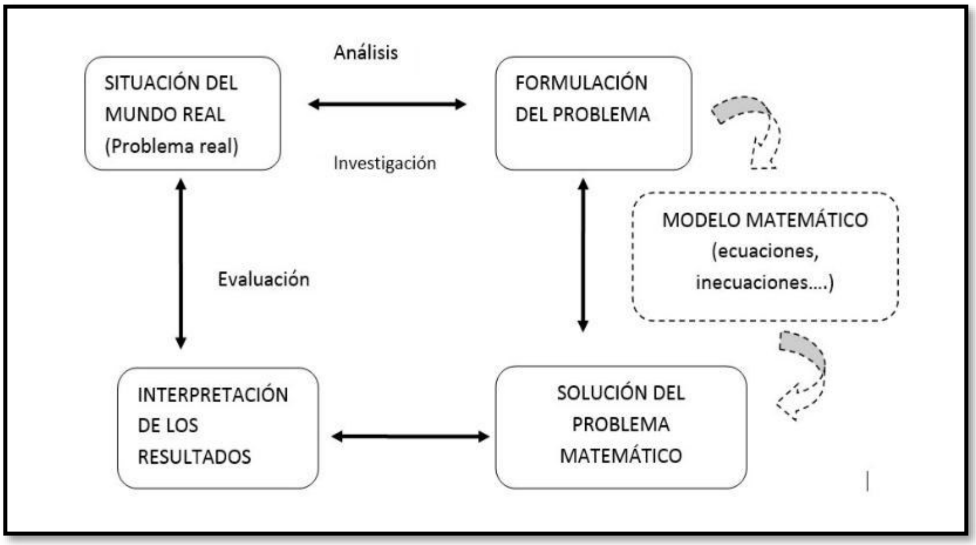
Gráfico 8. **Proceso de la modelación matemática**



Fuente. Organización del Bachillerato Internacional (2012). Programa del Diploma. Guía de Matemáticas NM. Primeros exámenes 2014.Cardiff. (p.12).

En esa dinámica, concebir la modelación matemática como un proceso implica poner en evidencia las dificultades y el progreso de los estudiantes; todo ello, para establecer planes de mejora en sus desempeños, como parte de su proceso de aprendizaje. Un esquema adicional de modelación matemática elemental es el que propone Cruz, C. (2010).

Gráfico 9. **Esquema de modelación matemática elemental**



Fuente. Cruz, C (2010)

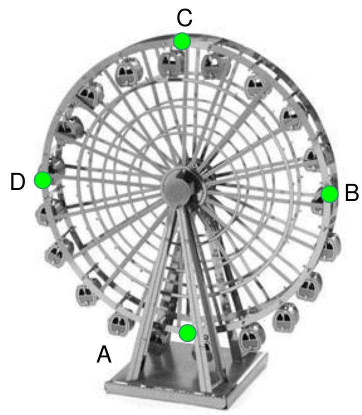
En ese orden de ideas, la modelación matemática, según Blum (1993) citado por Peña, L. y Morales, J. (2016), “puede entenderse como el proceso de construcción de un modelo, dirigido de una situación real a un modelo matemático, más específicamente, la manera de conectar el mundo real con las matemáticas” (p.64).

Debido a esto, los docentes deben plantear situaciones de resolución de problemas de contextos reales que sean de interés para los estudiantes, con el fin de que la modelación matemática conduzca a comprobar su validez, mediante el análisis y reflexión acerca del significado de los resultados obtenidos.

Ejemplo de una actividad secuenciada de modelación matemática adaptada de. Tarazona, F., Maurtua, J. y Gil, J. (2017) .

1º plantear un problema de la vida real.

Una noria (máquina hidráulica que sirve para extraer agua) gira a una velocidad constante. El radio de la noria es 10 m y la parte inferior de la esta se ubica a 2 m por encima del nivel del suelo. Un joven situado delante de la noria, observa que una luz verde se mueve alrededor de esta, cuando entra en movimiento.



La noria tarda 100 segundos en completar una vuelta.

Suponiendo que en el momento t = 0, la luz está en su punto más bajo. Encuentra el modelo que proporciona la altura de la luz verde respecto al suelo en cualquier momento.

2º Desarrollar un modelo.

¿Qué datos nos proporciona el problema?

- La noria tarda 100 segundos en completar una vuelta.
- El radio de la noria es 10 m.
- La noria se encuentra a 2 m sobre el suelo.
- Cuando t = 0, la luz está en su punto más bajo.

- Se identifican y se organizan en una tabla las diferentes alturas de la noria en los puntos A, B, C y D.

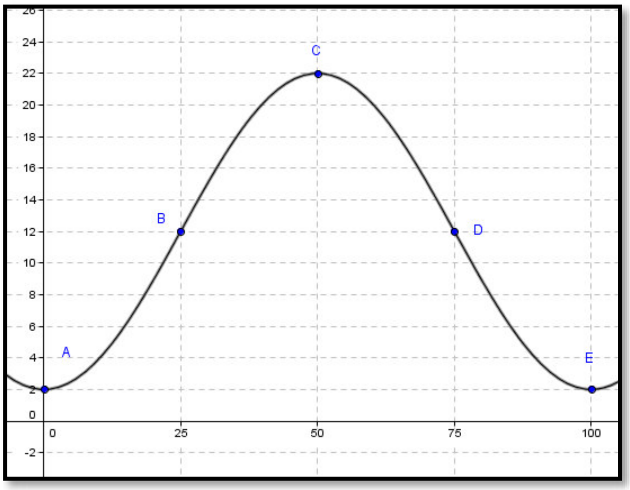
Tabla 1. **Altura de un punto de la noria en función del tiempo**

Punto	A	B	C	D	A
Segundos (t)	0	25	50	75	100
Altura (m)	2	12	22	12	2

Fuente. Tarazona, F., Maurtua, J. y Gil, J. (2017) .

Luego se representan los puntos considerando que el movimiento es periódico, en ese sentido tenemos la siguiente curva:

Gráfico 10. **Representación de la Altura de un punto de la noria en función del tiempo**



Fuente. Tarazona, F., Maurtua, J. y Gil, J. (2017) .

Siguiendo el modelo matemático $f(t) = a \cdot sen(b(t-c)) + d$ y haciendo los cálculos de cada parámetros encontramos el modelo $f(t) = 10sen\left(\frac{\pi}{50}(t-25)\right) + 12$.

3º Se comprueba la validez.

Utilizando las herramientas tecnológicas: Geogebra y calculadoras de pantalla gráfica, se comprueba que este modelo matemático se ajusta a las condiciones iniciales del problema contextualizado.

En este caso verificamos que el modelo anterior es equivalente a:

$$f(t) = 10sen(0,063t - 1,57) + 12$$

Ahora, verificamos la eficiencia del modelo corroborando la altura alcanzada por el punto verde en función a un tiempo determinado; en ese sentido, para t =75 s, 40 s, 100 s; las alturas alcanzadas por el punto verde en la noria son 12; 20,09 y 2 metros respectivamente.

4º Reflexionar sobre el modelo y aplicarlo.

Se reflexiona sobre las condiciones matemáticas de las variables tiempo y parámetros que conforman el modelo. Además, se analiza su aplicabilidad para modelar situaciones similares: los carruseles en los cuales la precisión y las estructuras físicas son factores determinantes para salvaguardar la vida de los usuarios.

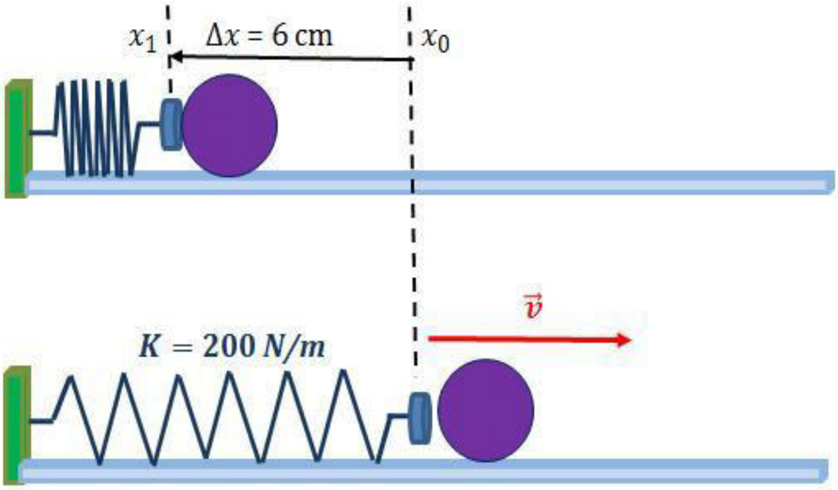
Gráfico 11. **Representación de una noria**

Fuente. Recuperado de (06/09/2018): *https://miviaje.com/norias-maravillosas/*

5° Ampliar.

Implica llevar a otros contextos la habilidad del modelamiento, por ejemplo al modelar el ritmo cardiaco de una persona, el sonido que emiten las cuerdas de una guitarra al ser estiradas, las crecidas de las olas del mar, la ley de Hooke, entre otros.

Gráfico 12. **Representación de la Ley de Hooke**



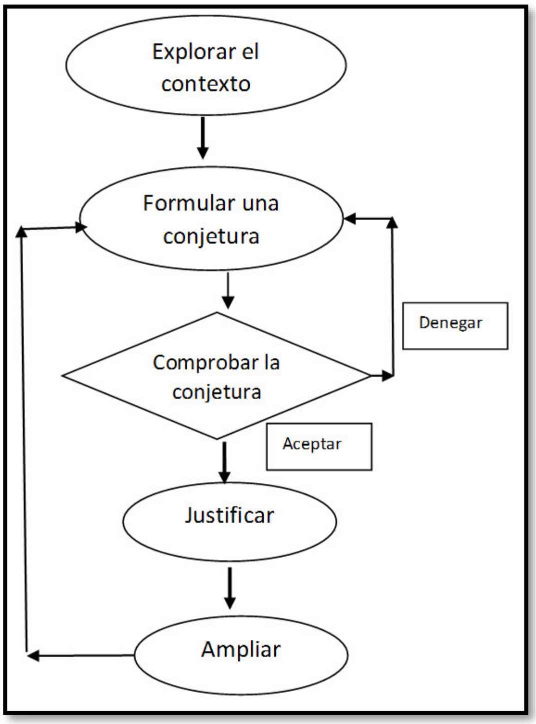
Fuente. Recuperado de (06/09/2018):
http://www.universoformulas.com/fisica/dinamica/ley-hooke/

Esta nueva visión nos plantea iniciar otra vez el ciclo de modelamiento, pero de modelos más complejos, en los cuales el enfoque interdisciplinario adquiere mayor relevancia.

b) El aprendizaje basado en la indagación.

Promueven actividades para que los estudiantes indaguen, busquen información, construyan su propia comprensión sobre el tema de investigación y desarrollen competencias complejas tales como: experimentar, cuestionar, plantear conjeturas, argumentar, comprobar y justificar los resultados producto de su investigación. Para tal efecto, el docente intencionalmente en la sesión de clase diseñar actividades de investigación de situaciones del entorno próximo de los estudiantes utilizando la variedad de recursos y herramientas con las que pueda contar. La siguiente figura muestra la secuencia del proceso de la indagación en el aula.

Gráfico 13. **Secuencia del proceso de indagación matemática**



Fuente. Organización del Bachillerato Internacional (2012). Programa del Diploma. Guía de Matemáticas NM. Primeros exámenes 2014.Cardiff. (p.11).

En ese sentido se sugieren realizar las siguientes actividades para la indagación matemática:

- Que el estudiante identifique en su contexto una situación motivadora que llame su atención y requiera indagación.
- Identificado el contexto responder a las preguntas que afloran de manera natural.

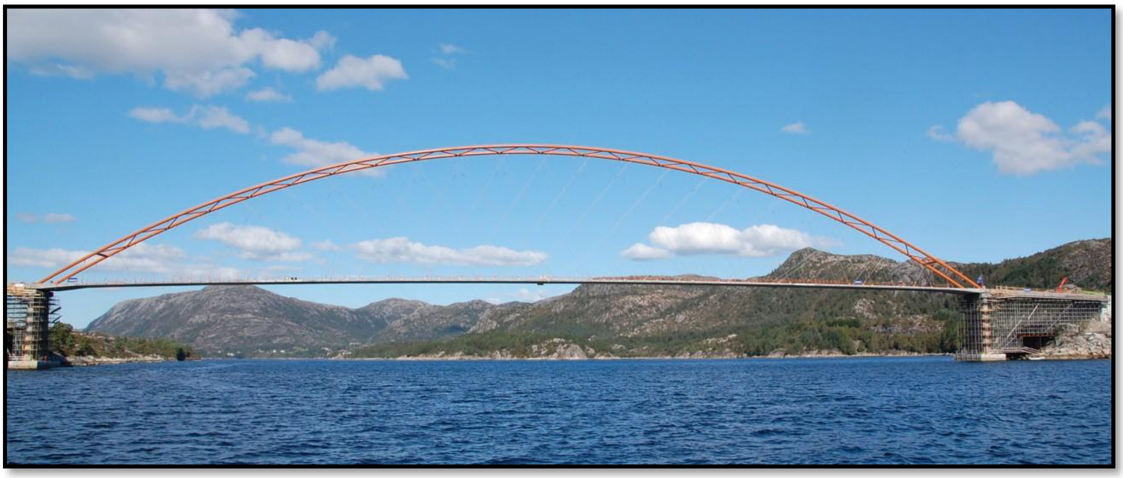
Por ejemplo si el contexto es el deporte la pregunta sería ¿cómo puedo hallar superficie de una pelota de futbol americano?

Gráfico 14. **Actividad matemática_volumen de la pelota de futbol americano**

Fuente. Recuperado de (28/10/2018): https://enviaregalo.com/productos/pelota-de-football-americano-de-foamy/

O si el contexto es las construcciones, la pregunta sería ¿de qué manera se puede modelar la estructura en forma de arco que soporta un puente?

Gráfico 15. ***Actividad matemática_Modelamiento de la estructura parabólica que sostiene un puente***



Fuente. Recuperado de (28/10/2018): https://fckestructural.wordpress.com/tag/arenas/

- Reconocer que marco teórico se requiere para el tratamiento matemático. En los ejemplos anteriores, tener comprensión sobre la aplicación de la integral definida y de la función de segundo grado.
- Identificar que recursos, software matemático o herramientas se tiene a la mano para responder a las preguntas de investigación. En los ejemplos utilizar el geogebra, maquetas, simuladores, entre otros.
- Presentar su informe que evidencie uso de la matemática y de la notación adecuada, además de tener en cuenta la probidad académica.

c) La vinculación de las experiencias y saberes previos de los estudiantes.

Según López, R. (2011), señala que “cualquier actividad puede resultar interesante a los educandos si se les propone hacer cosas semejantes a las que ellos realizan a diario en su vida familiar y comunitaria. La experiencia cotidiana con relación al trabajo suyo, de sus padres o de sus vecinos, a las tareas domésticas. Actividades que le dan la oportunidad, no de hacer cosas de la misma manera de siempre, sino de aprender distintas formas de hacerlas, sobre la base de lo ya conocido por ellos, es una necesidad en las nuevas prácticas educativas” (p.30).

d) La propuesta de problemas.

En este contexto, “los niños deben sentirse desafiados a hacer algo que no saben hacer, es decir, encontrar la respuesta a un problema que reta su imaginación y sus propias habilidades. Esta es una condición básica para que pueda participar con verdadero entusiasmo” (Idem). El maestro no debe pensar subjetivamente respecto a sus estudiantes al momento de proponer actividades, subestimando la capacidad de estos sino, más bien, movilizar el pensamiento en forma creadora para la autorregulación del proceso de aprendizaje mediante el uso de estrategias flexibles y apropiadas que transfieran y se adapten a nuevas situaciones.

e) La motivación para despertar el interés sobre el tema.

Cuando la situación de aprendizaje les sirve a los educandos en su vida cotidiana, estos identifican su utilidad para resolver los problemas de su entorno, así como un medio, para la comprensión de nuevos conceptos.

f) El trabajo en equipo.

Al respecto, López, R (2011) afirma que “Los niños, como todo ser humano son esencialmente sociales. Ninguna actividad que desarrollen de modo puramente individual pueda motivarlos de manera consistente. Lo significativo para ellos, es interactuar con sus compañeros. Naturalmente, si el docente no alienta un clima de integración y confianza entre ellos, quizá a muchos no les provoque relacionarse entre sí. Pero, eso ocurrirá por deficiencia nuestra, no porque así sean los niños. Es por ello, que se recomienda combinar permanentemente el trabajo individualizado, con el trabajo en pares, el grupo pequeño y grupo grande” (p.31).

g) El trabajo autónomo.

La misma investigadora, respecto a la gestión de su autonomía “los participantes pueden perder el interés en una actividad que al principio les resultó altamente significativa solo porque no los dejamos actuar con libertad. Si buscamos corregirlos a cada instante, dirigir su trabajo, censurar sus errores, adelantarles las respuestas y proporcionarles modelos correctos, para que imiten y reproduzca; los estudiantes no participarán con gusto. Hay que estimularlos a pensar por sí mismos, a resolver sus dificultades, a construir sus propias hipótesis, a hacer sus propias deducciones y a arriesgar su propia respuesta, aunque se equivoquen. De allí que el papel del docente no es el de proporcionarles todo enteramente al participante, sino más bien problematizar el aprendizaje haciéndolo interesante" (p.31).

h) La creación de ambiente de confianza potenciando una actitud activa.

Según Moreno, I. (2010); respecto a la gestión de espacios favorables para el trabajo, afirma que "Si el educando se siente coaccionado, menospreciado o no es tomado en cuenta por su profesor, no pondrá interés en lo que éste le proponga hacer, aun cuando la actividad pueda parecer maravillosa. La confianza entre el docente y sus alumnos, así como un clima de familiaridad y acogida entre los mismo estudiantes, es requisito indispensable para el éxito de cualquier actividad pedagógica" (p.24).

2.3.2. Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de la matemática

Dentro de las prácticas pedagógicas referidas a la asignatura de matemática en el nivel secundario se observa que el tratamiento de los temas se dan de manera parcelada: algebra, geometría, aritmética y trigonometría, estadística entre otras; o desarticulados con otras disciplinas del conocimiento, por ejemplo con la física, biología, química, economía y las artes. Esta situación, como es lógico pensar, dificulta en gran medida el aprendizaje y comprensión de los conceptos matemáticos, y en la utilización de estrategias complejas que permitan desarrollar construcciones integradas al conocimiento matemático. En ese sentido, la actividad matemática debe ser un proceso de interacción y construcción del saber disciplinar, en la que el conocimiento y los problemas subyacentes estén estrechamente relacionados con los aspectos metacognitivos de los estudiantes.

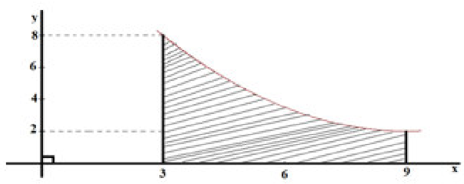
Respecto a lo último, Curotto, M. (2010), se refiere al conocimiento como "…los propios procesos y productos cognitivos que realiza el estudiante; así como las propiedades de la información, datos relevantes o cualquier aspecto relacionado con los procesos cognitivos y su regulación. Así mismo, señala que existe una dimensión metacognitiva en todas las estrategias utilizadas en el aula" (P.14), que de acuerdo a Mayer (1986) citado por Valle, A. y otros (1999) establecen la existencia de tres clase de estrategias: estrategias cognitivas, estrategias metacognitivas, y estrategias de recursos. En relación a ello “la primera hacen referencia a la integración del nuevo material con el conocimiento previo,…que se utilizan para aprender, codificar, comprender y recordar la información al servicio de unas determinadas metas de aprendizaje. La segunda hace alusión a la planificación, control y evaluación por parte de los estudiantes de su propia cognición…permiten el conocimiento de los procesos mentales, así como el control y regulación de los mismos con el objetivo de lograr determinadas metas de aprendizaje. La tercera se refiere a los diferentes tipos de recursos que contribuyen a que la resolución de la tarea se lleve a buen término” (p.444-445).

En este apartado, daremos a conocer algunos recursos para desarrollar capacidades metacognitivas en los estudiantes.

- La resolución de problemas como pequeñas investigaciones. En estas actividades lo que se quiere es que el estudiante se aparte de los algoritmos mecanizados y cálculos numéricos; mas por el contrario, promueva la discusión, planteamiento y formulación de hipótesis y la propuesta resolución de problemas utilizando una variedad de estrategias.

Gráfico 16. **Actividad matemática_Aproximación del área debajo de la curva**

El área de la región sombreada es mayor que 12 y menor que 48.



(a) ¿Por qué? Justifica.

……………………………………………………………………………………

(b) ¿Puedes dar valores del área más próximos al área formada debajo de la curva?, ¿cuáles podrían ser?

……………………………………………………………………………………

(c) ¿Cómo se obtuvo los valores que ha mencionado en el apartado anterior?

……………………………………………………………………………………

(d) ¿Es posible hallar la ecuación de la curva que se muestra en la figura? ¿qué datos se tendrían que conocer para lograrlo? ¿es posible determinarlos?

Fuente. Adaptado de Aldana, E. (2011)

- Preguntas cortas que requieren de pocos pasos y que proporciona información valiosa sobre el progreso de los estudiantes sobre la comprensión del objeto matemático. Adicionalmente se explica o describe de manera reflexiva la experiencia realizada al resolver el problema o analizar los procesos.

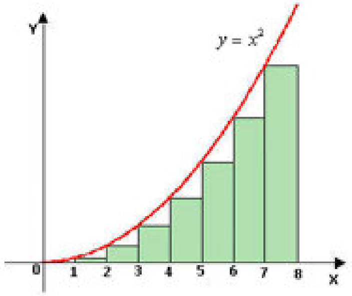
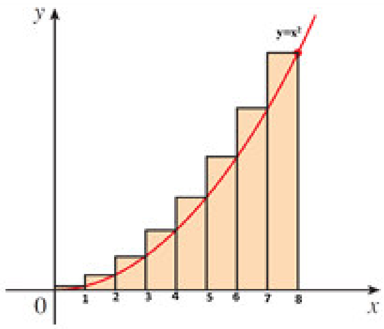
Gráfico 17. **Actividad matemática_Comparación de áreas obtenidas a través de la geometría plana y la integral definida**

Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función f(x)=x y el eje x, en intervalo [-3,3].	
(a) Dibuje y rotule adecuadamen todos los elementos de la gráfica.	(b) el gráfico mostrado en (a) calcule área de la región R. ………………………………………….… Justifique sus resultados:…………………
(c) Calcule la integral $\int_{-2}^{2} x dx$.	(d) ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justifique su respuesta.

Fuente. Maurtua, J. (2018)

- Preguntas que plantea el docente sobre la resolución de un problema. Consiste en solicitar al estudiante que explique los procesos que ha utilizado para resolver un problema, con el propósito de identificar las dificultades y superarlas; al mismo tiempo, permite la reflexión sobre su propia comprensión del objeto matemático. En esta interacción el estudiante entra en reflexión sobre sus errores de comprensión del concepto y la ausencia de relación lógica en sus procedimientos.

Gráfico 18. **Actividad matemática_Comparación de la suma inferior y superior con respecto al área debajo de la curva**

<table>
<tr><td colspan="2">(a) Dados los siguientes gráficos</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(i) Determine las alturas de cada rectángulo considerando el extremo izquierdo.
……………………………………………</td><td>(ii) Determine las alturas de cada rectángulo considerando el extremo derecho.
……………………………………………</td></tr>
<tr><td colspan="2">(iii) Determine la suma de las áreas en u² de las regiones rectangulares en cada gráfico.
…………………………………………………………………. ……………………………</td></tr>
<tr><td colspan="2">(b) ¿Qué diferencias existen entre las dos áreas obtenidas, del apartado (a)?
¿por qué? …………………………………………………………………………………</td></tr>
</table>

Fuente. Maurtua, J. (2018)

- Formulación de preguntas por parte de los estudiantes. Es una estrategia de mucha relevancia y autorregulación cognitiva porque invita al estudiante a enfocarse en el campo temático y a representar mentalmente la situación o el contexto de mayor complejidad. Así mismo, permite contrastar que tanto conocimiento requiere el estudiante, cuales son estas y con cuáles de ellos cuenta para la formulación de la pregunta.

Gráfico 19. **Actividad matemática_Análisis del regla de Barrow**

Un estudiante pide a sus compañeros analizar el desarrollo de la integral definida en la que se ha aplicado la regla de Barrow o el segundo teorema fundamental del cálculo.

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = -1x^{-1}\Big|_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$$

Respecto a la información solicita:

(a) Verificar si la proposición es verdadera.

(b) Caso contrario identificar donde o que produce el error.

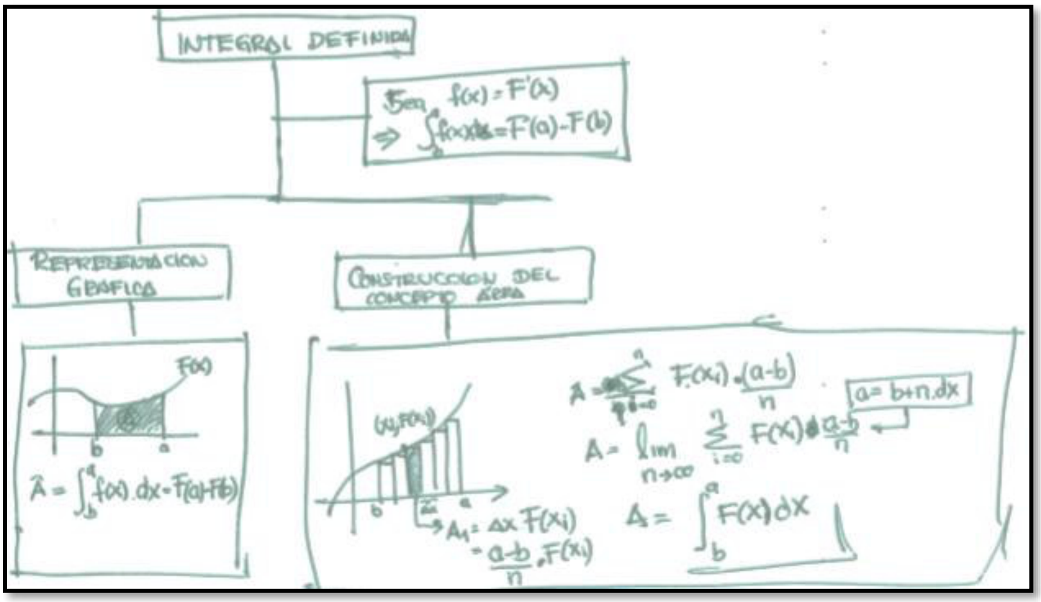
(c) Como se podría subsanar ese error para.

(d) Graficar la función y rotule adecuadamente las particularidades de esta función.

Fuente. Tomado de Aldana, E. (2011)

- Actividades de síntesis y organización de la información a través de mapas mentales o conceptuales. Es una estrategia de alta complejidad cognitiva en la cual el estudiante tiene que plasmar de manera objetiva como ha estructurado el concepto matemático; es decir cuál es la descomposición genética del concepto. Para ello requiere organizar y jerarquizar la información.

Gráfico 20. **Actividad matemática_Mapa conceptual de la integral definida**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

2.3.3. La teoría APOE como modelo de cognición

La teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), en palabras de Rodríguez, M., Aparragues, M. y Trigueros, M. (2018) "es una teoría constructivista que toma como marco de referencia las ideas de Piaget respecto al desarrollo del conocimiento; fundamentalmente rescatando el concepto de abstracción reflexiva y el concepto de esquema" (p.5). Surge como un intento de entender y describir como los individuos construyen las estructuras lógico-matemáticas durante el curso del desarrollo cognitivo a través de la abstracción reflexiva.

Este concepto introducido por Piaget y Beth (1980), define como es el mecanismo que permite al individuo transitar de un nivel cognitivo a otro, a través de actividades concretas o físicas y mentales. Esto implica, la proyección del conocimiento existente (conocimientos previos) a una dimensión superior del pensamiento; y la reorganización y reconstrucción de ese conocimiento para la conformación de esquemas mentales; abordadas desde el enfoque cognitivo.

En ese sentido, Dubinsky (1991,1996) citado por Aldana (2011) "considera que la principal dificultad para aplicar las ideas de Piaget al Pensamiento Matemático Avanzado, ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas" (p.66).

Para el mismo autor y su equipo de colaboradores, según Trigueros, M. (2005) "la abstracción reflexiva es proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento, lo que implica, entre otras cosas, la organización o la toma de dichas decisiones y separar la forma de su contenido, e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior" (p.7).

En esa misma dirección, la referida autora destaca que "el mecanismo para pasar de un nivel a otro es siempre, y como ya se mencionó, la abstracción reflexiva; entendida en el sentido de la reflexión, que hace el sujeto sobre el sentido de las operaciones que se efectúan sobre el objeto matemático y del efecto que tienen sobre el" (p.9).

En ese sentido, concluye que: "el concepto de abstracción reflexiva puede ser una poderosa herramienta en el estudio del Pensamiento Matemático Avanzado, que puede proporcionar una base teórica que apoye y contribuya a nuestra comprensión de qué es y cómo podemos ayudar a los estudiantes a desarrollar la capacidad de participar en ella".

Siguiendo con las ideas de estos investigadores, cuando una persona es exitosa, afirman, que el problema ha sido asimilado por el esquema. Cuando una persona no es exitosa, en condiciones favorables, su esquema existente puede ser acomodado para manejar el nuevo fenómeno (Arnon et al., 2014). Este hecho, es el aspecto constructivo de la abstracción reflexiva; es decir, los estudiantes realizan procesos mentales para construir conceptos que provienen de las situaciones problemáticas.

Por otra parte, Dubinsky (1991) citado por Rodríguez (2018), plantea la idea de "usar las experiencias computacionales para ayudar a los estudiantes a crear abstracción reflexiva, como una forma de lidiar con estos obstáculos epistemológicos y conflictos" (p.145).

Otro punto interesante respecto a la construcción de conceptos es que estos autores aíslan cinco tipos de construcciones, que Piaget encontró al analizar como los niños desarrollan el pensamiento lógico; siendo estas: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión; las mismas que fueron concretizadas en el estudio de la construcción de la comprensión del concepto de función.

En la teoría APOE según (Dubinsky, 1995), citado por Vega, M., Carrillo, J. y Soto, J (2014) "el desarrollo de la comprensión comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones, las acciones se interiorizan para formar procesos los que a su vez se encapsulan para formar objetos (que a su vez en muchas operaciones matemáticas, es necesario desencapsular un objeto y trabajar con el proceso del cuál proviene) y finalmente las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas"(p.406). Así mismo, parte de la hipótesis que en palabras de Asiala, et al (1996, p.5) señala que "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia para responder ante las situaciones matemáticas problemáticas, reflexionando sobre ellas dentro de un contexto social y mediante la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos matemáticos, que organizándolos en esquemas puedan ser capaz de dar la solución a estas situaciones". De esta afirmación se concluye que es importante que un estudiante tenga un conjunto importante de esquemas.

Además, para este investigador el aprendizaje consiste en la aplicación de la abstracción reflexiva a esquemas existentes, para construir nuevos esquemas que permitan la comprensión de conceptos. En consecuencia, la construcción de un esquema no puede ser posible sin los prerrequisitos; Es decir, un esquema para su construcción requiere de esquemas desarrollados previamente o pre existentes; que muchas veces no es valorado en la enseñanza tradicional. En ese sentido, las construcciones mentales referidas, son las transformaciones que realiza un alumno para dar solución a problemas, actividad o tarea, y que les permite obtener significado sobre ellas. Adicionalmente, en el desarrollo del conocimiento matemático las construcciones mentales pueden ser reconstrucciones exactas (correspondiente a la memoria y a la repetición de métodos previamente conocidos) o adaptaciones de algo previamente aprendido. La última de estas dos es importante en el avance y desarrollo del conocimiento matemático.

En conclusión, los procesos que ocurren en la mente de los estudiantes son controladas por ciertos mecanismos de construcción, tal como se puede observar en las características de la construcción mental propuesto por De Vries (2001), citado por Aldana, E. (2011).

A continuación se describirán los mecanismos de "construcción del concepto de la integral definida", tales como:

- Acción. Es la reacción a los estímulos que un individuo percibe como externa. En ese sentido, "la transformación se produce como una reacción a una indicación que ofrece información sobre los pasos a seguir. Cuando un sujeto sólo puede realizar este tipo de transformaciones en la resolución de una tarea, decimos que está operando a nivel de acción" (Idem, p.67). Respecto al concepto de integral definida, el estudiante responde al nivel de acción cuando realiza una partición del intervalo en subintervalos para construir rectángulo por debajo y encima de la región real, para hacer aproximaciones del área por defecto y por exceso.

Gráfico 21. **Acción_Cálculo de áreas desde la partición de un intervalo cerrado**

Sea R la región formada entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el intervalo [0,8].

(a) Grafique la función en el plano cartesiano.

(b) Utilice 4 particiones y sobre ellas construir rectángulos considerando el extremo derecho e izquierdo

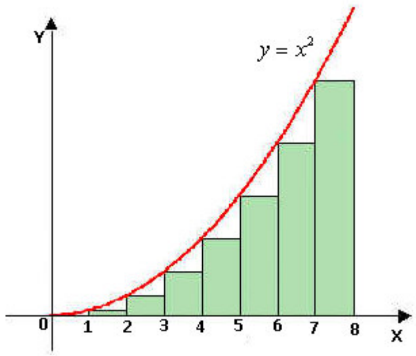
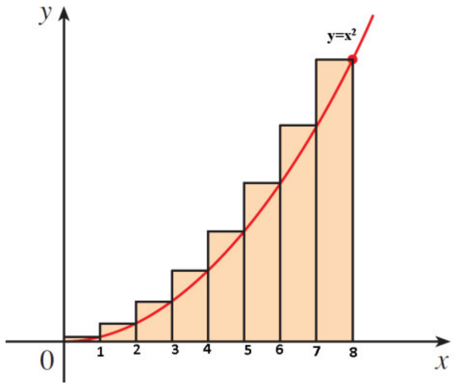
(c) Escriba el área de cada rectángulo utilizado de acuerdo a las posiciones señaladas en (b)

(d) Cuál es la diferencia entre las áreas calculadas.

Fuente. Aldana, E. (2011)

- Proceso. “Es la interiorización de una acción. Es una construcción producto de una transformación interna, no necesariamente dirigida por un estímulo externo. En el proceso el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede invertirlos, es decir, tiene más control de la transformación” (Idem, p. 67). Asimismo, diríamos que un estudiante puede tener una concepción de proceso en el concepto de Integral Definida, si logra interiorizar las acciones anteriores por aproximaciones repetidas y transformarlas en los límites de las sumas inferiores y superiores de Darboux.

Gráfico 22. **Proceso_Cálculo de áreas a través de la partición de un intervalo**

<table>
<tr><td colspan="2">(a) Dados los siguientes gráficos</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(i) Determine las alturas de cada rectángulo considerando el extremo izquierdo.
…………………………………………..</td><td>(ii) Determine las alturas de cada rectángulo considerando el extremo derecho.
…………………………………………..</td></tr>
<tr><td colspan="2">(iii) Determine la suma de las áreas en u² de las regiones rectangulares en cada gráfico.……………………………………….. ……………………..</td></tr>
<tr><td colspan="2">(b) ¿Qué diferencias existen entre las dos áreas obtenidas, del apartado (a)? ¿Por qué? …….
……………………..…………………………………..……</td></tr>
</table>

Fuente. Maurtua, J. (2018)

• Objeto. Se refiere "cuando el estudiante reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, siendo consciente del proceso como una totalidad, aprecia que la transformación (acción o proceso) puede actuar sobre él y es capaz de construir la transformación. Entonces, se dice que el estudiante ha reconstruido este proceso en un objeto cognitivo; es decir que el proceso ha sido encapsulado y convertido en un objeto" (Idem, p. 67). Considerando el gráfico (23), diríamos que un alumno muestra una idea de objeto, cuando tiene la capacidad de inferir que si la amplitud de cada subintervalo -en una partición, no necesariamente de la misma amplitud- se aproxima a cero, el número de subintervalos tiende a infinito y además que, si existe el límite de las sumas, obtiene lo que es la Integral Definida. En ese sentido, se ha encapsulado el concepto de la integral definida.

Gráfico 23. **Objeto_La suma de Riemann**

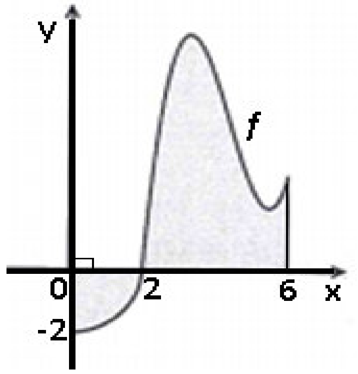
Sea $f(x)=x^2-2x; 0\leq x\leq 3$.
(a) Grafique y halle la suma de Riemann con n=6 (subintervalos), para ello tome los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. De su respuesta correcta hasta con tres cifras significativas.
Grafique aquí.
(b) ¿Qué representa la suma de Riemann?
…………………………………………………………………………………

Fuente. Adaptado de Aldana, E. (2011)

- Esquema. Es entendido como "una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente del individuo y que puede ser evocada para tratar una situación problemática de esa área de la Matemática. Una función importante y característica de la coherencia de un esquema está en poder determinar qué está en el ámbito del esquema y qué no" (Ibídem, p. 68). En ese orden de ideas, cuando un estudiante es retado a realizar una actividad o trabajo matemático en concreto, evoca un esquema para resolverla, para ello, utiliza los conocimientos previos con las que cuenta o las relaciones entre los conceptos matemáticos que en ese momento dispone.

Gráfico 24. **Esquema_Aplicación de la integral definida**

A continuación se muestra la gráfica de una función f, para $0\leq x\leq 6$.	
	(a) Halle $\int_0^2 f(x)dx$.

 La primera parte de la gráfica es un cuarto de círculo de radio 2 unidades (u) y con centro en el origen.	(b) La región está delimitada por la función f y los ejes de coordenadas y la recta $x=6$. Si el área de esta región es $3\pi u^2$. Halle $\int_{2}^{6} f(x)dx$.

Fuente. Maurtua, J. (2018)

En este caso podríamos determinar que un estudiante muestra una concepción de esquema del concepto de integral definida porque establece relaciones de tipo lógico entre los elementos o conceptos matemáticos que configuran este concepto matemático.

Sobre lo anterior y las actividades matemáticas propuestas, Trigueros, M (2005), afirma que; ante iguales situaciones, los estudiantes pueden utilizar los mismos conceptos y distintas relaciones lógicas entre estos conceptos. Al respecto, de acuerdo al tipo de relaciones lógicas que utiliza cada sujeto entre los elementos que utiliza, así como el tipo de construcciones que hace sobre el concepto matemático, depende del conocimiento matemático que tenga. Adicionalmente señala, que los esquemas son una herramienta conceptual de análisis que permite identificar características de lo que hace el alumno cuando resuelve un problema matemático.

Finalmente, cabe señalar que en el transcurso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, a veces es necesario desencapsular el objeto y volver al proceso del cual se obtuvo, a fin de usar sus propiedades y manipularlo; en esa interacción los objetos se organizan en esquemas, los que al mismo tiempo se relacionan y organizan con otros esquemas.

2.3.4. Desarrollo del esquema de la integral definida

Según Orton (1983), citado por Aranda (2015) en su estudio sobre la comprensión de la integración en estudiantes de Bachillerato y universidad, señalaba que “una de las dificultades de los estudiantes para comprender la integral definida como límite de una suma (Suma de Riemann) era que no habría comprendido adecuadamente el proceso de límite” (p. 27).

Por su parte, Piaget, J. y Inhelder, B. (1997), definen un esquema como “la estructura o la organización de acciones, que se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas” (p. 93).

El aporte en este caso de la teoría APOE es perfeccionar la comprensión y explicación de los esquemas a través de las tres fases de desarrollo propuesto por Piaget.

En esa dirección, el desarrollo de un esquema mental es un proceso cambiante y dinámico; y que los conocimientos crecen según algunos mecanismos y niveles de construcción cognitiva: Intra, Inter y Trans, denominadas triada, que se suceden según un orden fijo en todas las disciplinas por lo que no se trata de un proceso específico del pensamiento científico. En cada nivel se repiten los mismos cambios que en el proceso total.

Estos niveles permiten una comprensión profunda del desarrollo de los esquemas ya que son estructuras matemáticas formadas por las relaciones de tipo lógicas establecidas entre los elementos o conceptos matemáticos que componen una noción o idea matemática que pueden ser evocados para resolver un problema matemático o del contexto real. En ese sentido, el paso de un nivel al otro no implica tener más conocimientos que el nivel anterior, sino que cada vez que el sujeto aborda un nuevo concepto, se produce un proceso de equilibración entre la asimilación de los propios esquemas y la acomodación de estos conceptos en una nueva estructura mental.

En la presente investigación se tendrá en cuenta los tres niveles o fases del desarrollo propuestas en la teoría APOE respaldados de los resultados de la investigación realizada por Aldana (2011). En ese sentido, se analizará como los estudiantes de la muestra identificados con A1, A2, B1, B2, C1 y C2 realizan el tratamiento de la integral definida.

a) Nivel Intra. La característica de este nivel "es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. Por un lado, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; y por otro, el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse" (Piaget, J. y García, R., 1982, p. 163).

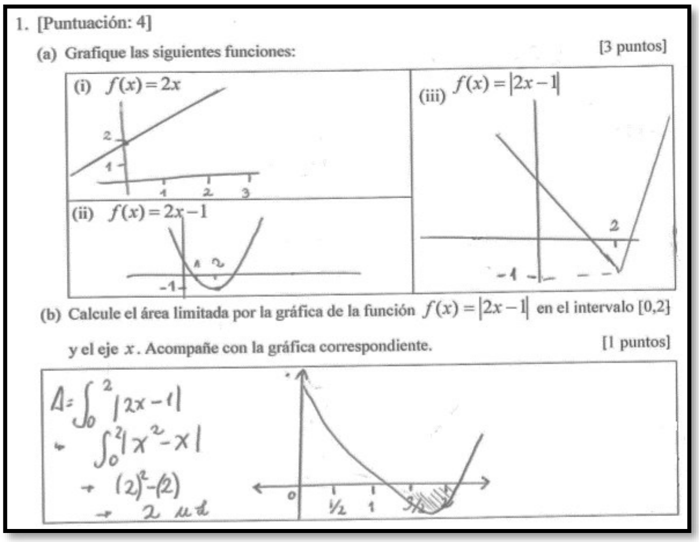
Por su parte Aldana (2011), establece una subdivisión de este nivel estableciendo características específicas que guardan correspondencia con lo observado en los estudiantes que conforman la muestra. En ese sentido:

A.1 El estudiante se encuentra en el nivel intra 1 porque:

1. "No establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos".

Cuando el estudiante no tiene la capacidad de resolver la tarea, porque no tiene los conocimientos previos para la resolución. No logra establecer ningún tipo de relación lógica, ni usar los elementos que le permiten evidenciar una comprensión mínima del concepto del objeto matemático. Presenta conflictos en el tratamiento del objeto matemático.

Gráfico 25. **Nivel Intra 1_No establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos**



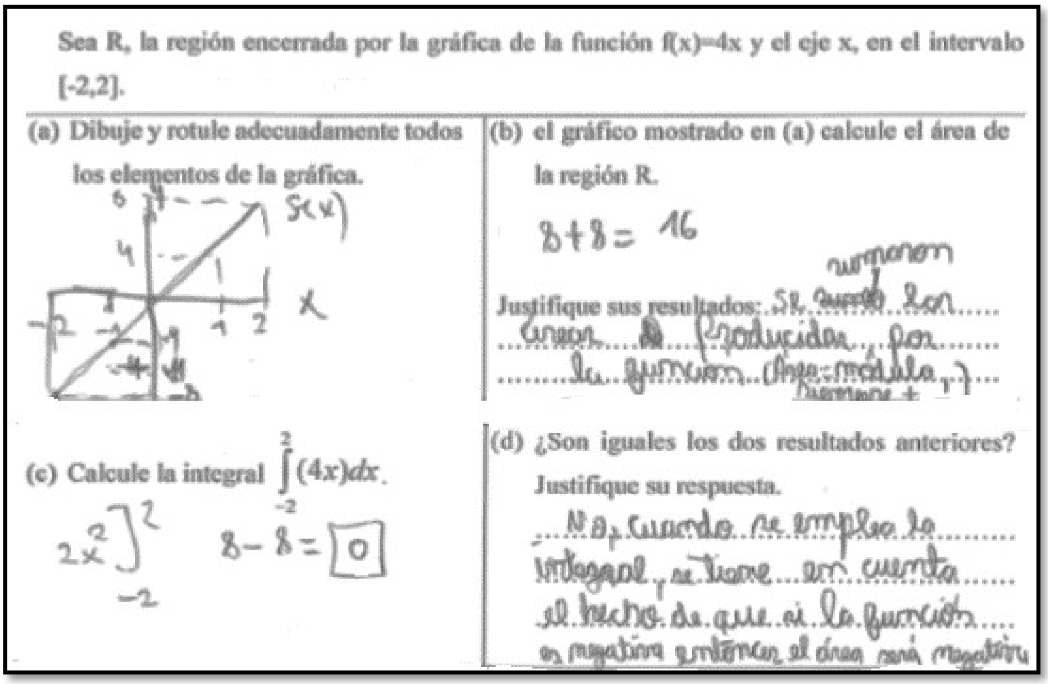
Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el ejemplo se observa que no recuerda las características de las funciones lineales y cuadráticas y sus respectivas representaciones gráficas.

2. “Recuerda sólo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado sólo a un sistema de representación, gráfico, algebraico o analítico”.

Cuando el estudiante menciona de memoria y generalmente de forma reiterada por lo menos un elemento matemático como producto de la instrucción previa (por ejemplo la definición de la integral definida), pero sólo es capaz de utilizarlo en la resolución de la actividades o tareas desde un sistema de representación (generalmente la algebraica); es decir, que no logra establecer una transformación entre las diferentes formas de representación: gráfico, algebraico y analítico.

Gráfico 26. **Nivel Intra 1_Recuerda solo algún elemento matemático**

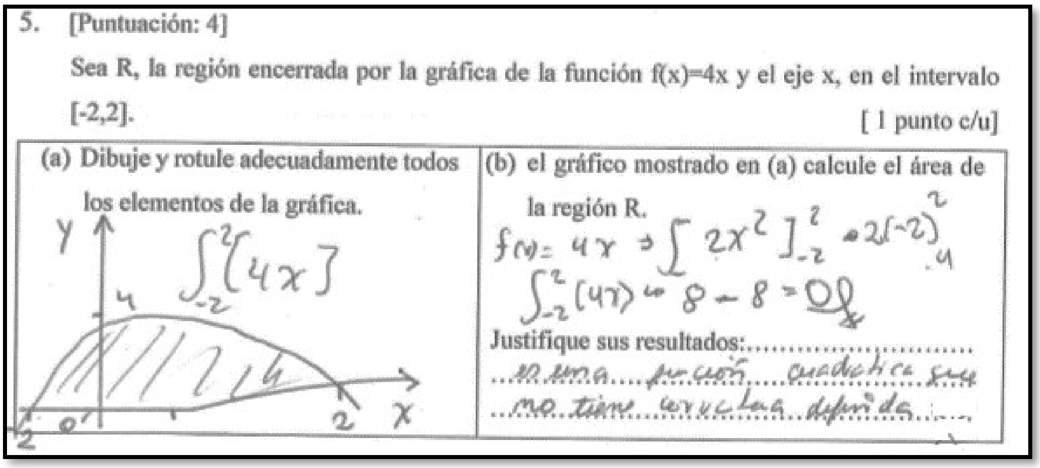


Fuente. Maurtua, J. (2018)

3. “Recuerda elementos matemáticos con errores”.

Es propio de este subnivel de desarrollo del esquema que un estudiante al tratar de resolver una tarea recuerde algunos elementos matemáticos y cuando intenta aplicarlos lo haga con ideas erróneas y/o de forma incorrecta, y por tanto; los procedimientos que emplea en la resolución de las situaciones problemáticas sean incorrectos.

Gráfico 27. **Nivel Intra 1_Recuerda elementos matemáticos con errores**



5. [Puntuación: 4]

Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función f(x)=4x y el eje x, en el intervalo [-2,2]. [1 punto c/u]

(a) Dibuje y rotule adecuadamente todos los elementos de la gráfica.

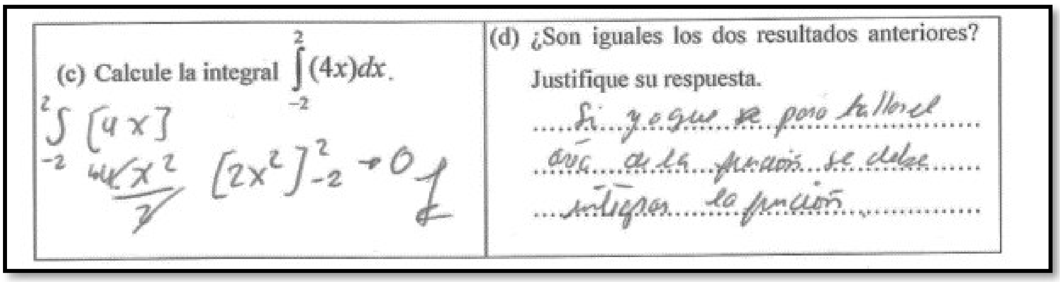
(b) el gráfico mostrado en (a) calcule el área de la región R.

Justifique sus resultados:

Fuente. Adaptado de Aldana, E. (2011)

En el ejemplo los estudiantes, desnaturalizan las representaciones gráficas de la función lineal y forzando la presencia de una función cuadrática con el propósito que aparezca una región cuya área es calculada por la integral definida. No repara en lo mínimo que el área de la región debe ser diferente de cero; la actuación del estudiante carece de sentido lógico.

Gráfico 28. **Nivel Intra 1_Recuerda elementos matemáticos con errores respecto a la integral definida y el área debajo de la curva**



(c) Calcule la integral $\int_{-2}^{2}(4x)dx$.

(d) ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justifique su respuesta.

Fuente. Adaptado de Aldana, E. (2011)

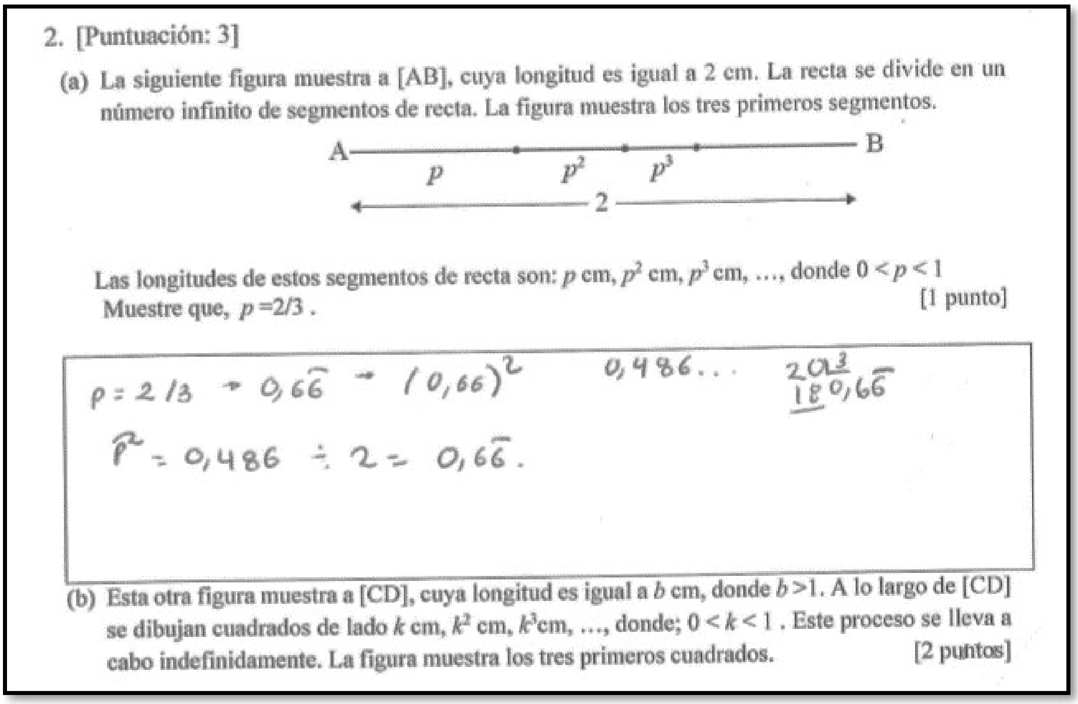
En este caso particular, el estudiante recuerda la aplicación de la regla de Barrow; sin embargo, no se da cuenta que los procesos para hallar el área pedida no son los más adecuados. En ese sentido, hace afirmaciones que parte de un error de procedimientos, al no contemplar el área de regiones que están por encima y debajo del eje de las abscisas y que además son simétricas.

A.2 El estudiante se encuentra en el nivel intra porque:

1. "Muestra dificultades en establecer relaciones lógicas: conjunción lógica; entre elementos matemáticos".

La relación lógica que más habitualmente usan los alumnos en la construcción del esquema de Integral Definida u otro concepto matemáticos la de conjunción lógica ("y"), entre los elementos matemáticos que representa ya sea de forma tabular, algebraica o algebraica. En general, en este nivel aunque el estudiante no suele establecer relaciones lógicas cuando intenta establecer conjunción lógica tiene dificultades para hacerlo, porque normalmente los elementos matemáticos que recuerda son de memoria y al usarlos lo hace de forma inconclusa.

Gráfico 29. **Nivel Intra_ Muestra dificultades al establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos**



2. [Puntuación: 3]

(a) La siguiente figura muestra a [AB], cuya longitud es igual a 2 cm. La recta se divide en un número infinito de segmentos de recta. La figura muestra los tres primeros segmentos.

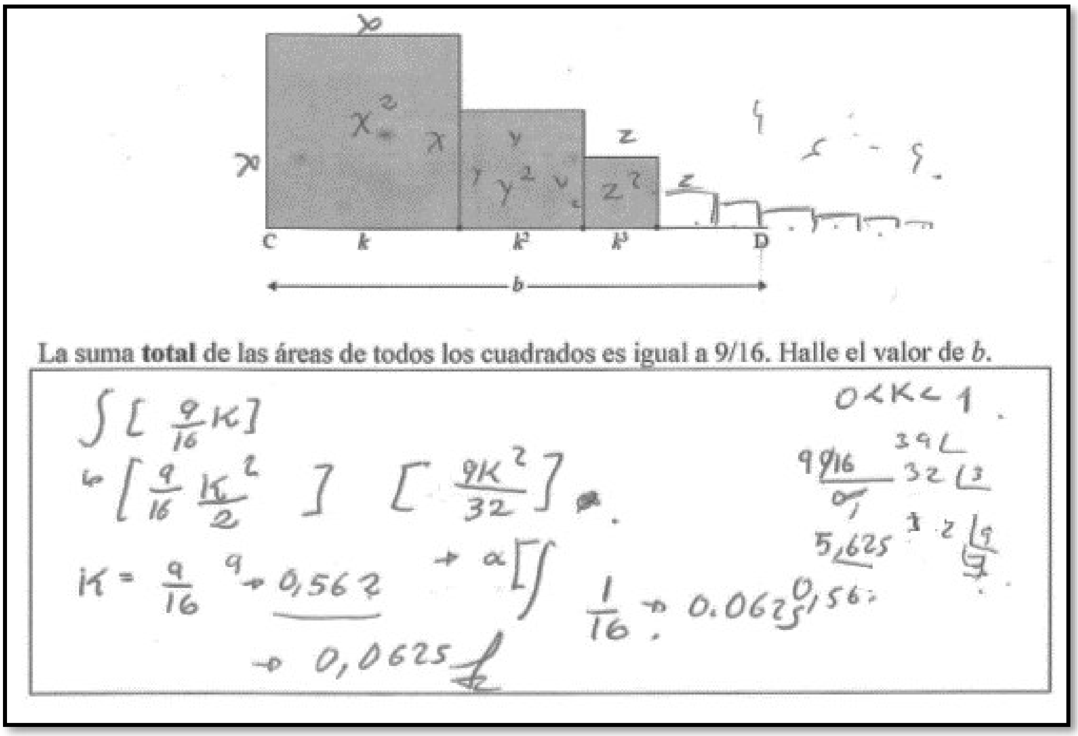
Las longitudes de estos segmentos de recta son: p cm, p^2 cm, p^3 cm, …, donde $0 < p < 1$

Muestre que, $p = 2/3$. [1 punto]

$p = 2/3 \to 0{,}6\bar{6} \to (0{,}66)^2$ $0{,}486\ldots$ $20|3$ 18 $0{,}6\bar{6}$

$p^2 = 0{,}486 \div 2 = 0{,}6\bar{6}$.

(b) Esta otra figura muestra a [CD], cuya longitud es igual a b cm, donde $b>1$. A lo largo de [CD] se dibujan cuadrados de lado k cm, k^2 cm, k^3cm, …, donde; $0 < k < 1$. Este proceso se lleva a cabo indefinidamente. La figura muestra los tres primeros cuadrados. [2 puntos]



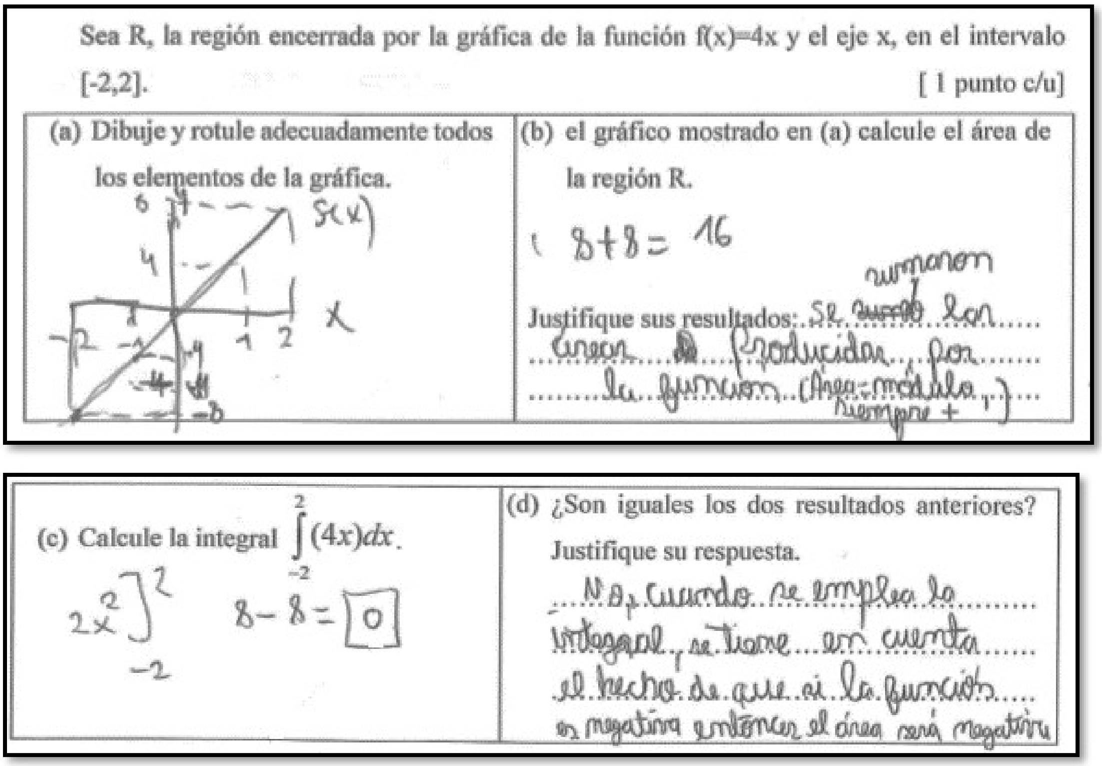
Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el ejemplo, el tratamiento numérico que se plantea en la situación no guarda correspondencia con el cálculo de áreas a través de la integral definida.

2. “Recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada”.

En este nivel el estudiante suele utilizar uno o varios elementos matemáticos pero de forma aislada o inconexa. Esto se presenta porque el estudiante recurre a un sólo elemento matemático representado de forma gráfica, algebraica o analítica, y puede suceder porque la resolución de la tarea sólo exige el uso de un elemento matemático o varios de ellos; pero no tiene la capacidad de utilizarlos conjuntamente para resolver la actividad o tarea. En ocasiones, además, suele mencionar algunos elementos matemáticos sin saber cómo aplicarlos en la resolución de la tarea.

Gráfico 30. **Nivel Intra_ Recuerda elementos matemáticos de forma aislada**



Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función f(x)=4x y el eje x, en el intervalo [-2,2]. [1 punto c/u]

(a) Dibuje y rotule adecuadamente todos los elementos de la gráfica.

(b) el gráfico mostrado en (a) calcule el área de la región R.

$8+8=16$

Justifique sus resultados: Se sumaron las areas producidas por la funcion (Area = módulo,) siempre +

(c) Calcule la integral $\int_{-2}^{2}(4x)dx$.

$2x^2\Big]_{-2}^{2}$ $\quad 8-8=\boxed{0}$

(d) ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justifique su respuesta.

No, cuando se emplea la integral se tiene en cuenta el hecho de que si la función es negativa entonces el área será negativa

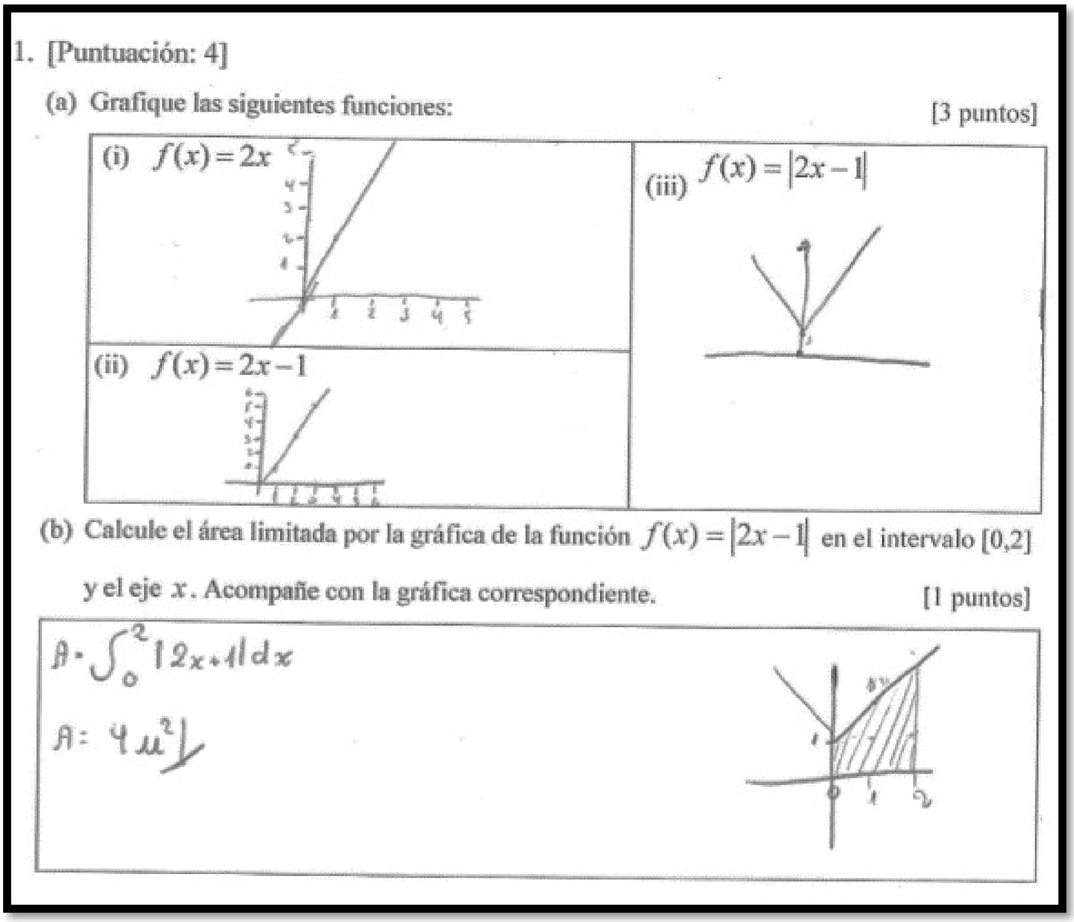
Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el ejemplo, el área calculada utilizando la geometría euclidiana difiere con lo obtenido al aplicar la integral definida. En el primero se obtiene 16 u^2 y en el segundo cero.

3. “No tiene sintetizados los sistemas de representación”.

Es característico de este nivel que el estudiante logre utilizar uno o varios elementos matemáticos, pero no es capaz de coordinar el uso de estos entre los sistemas de representación algebraica y gráfica; es decir, que la resolución que hace el alumno de la tarea, depende mucho si la información dada o la que él mismo produce proviene de un registro gráfico o algebraico.

Gráfico 31. **Nivel Intra_ No tiene sintetizados los sistemas de representación**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el ejemplo, la representación gráfica presenta deficiencias y para calcular el área así formada por la función en el plano cartesiano, es tratada a través de una integral definida en las cuales no se tiene en cuenta la definición de la función valor absoluto y su respectivo dominio.

b) Nivel Inter. Lo propio de este nivel es que “una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas, ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos” (Piaget y García, 1982, p. 165).

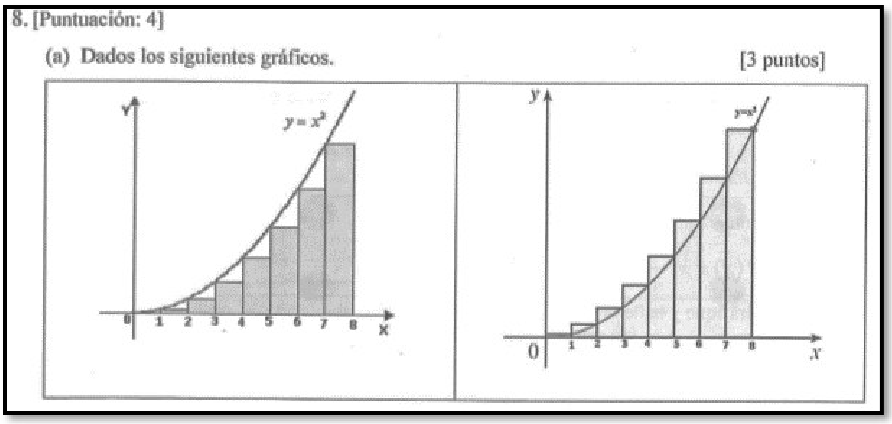
Siguiendo a Aldana (2011), también establece una subdivisión de este nivel estableciendo características específicas, las mismas que son descritas a través de ejemplificaciones que son el resultado del tratamiento de la integral definida y los tópicos conexos en la presente investigación.

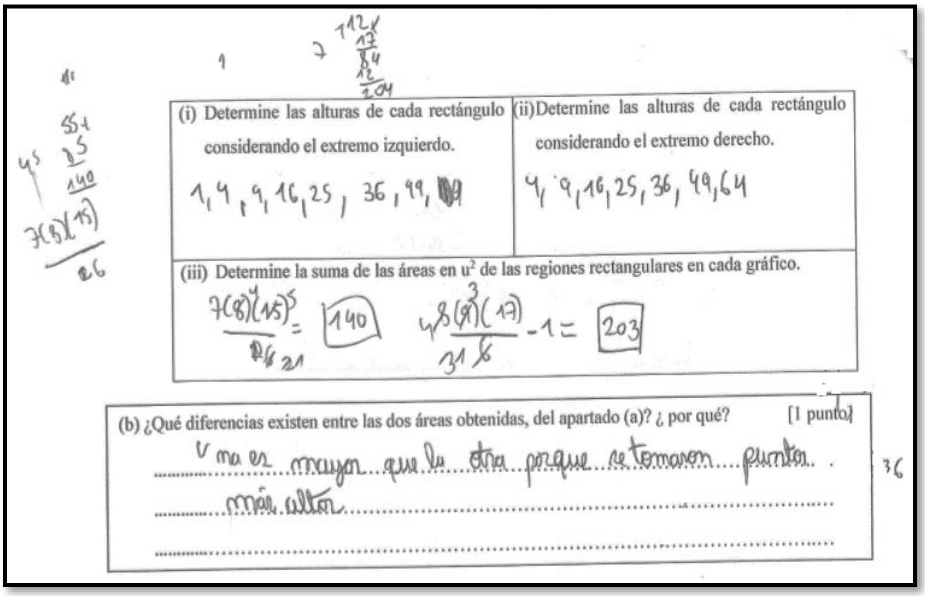
B.1 El estudiante se encuentra en el nivel inter 1 porque:

1. "Usa la conjunción lógica correctamente entre los elementos matemáticos en una misma forma de representación".

Es propio de este nivel de desarrollo que el alumno empiece a establecer relaciones lógicas a través de la conjunción entre elementos de los conceptos matemáticos utilizando el mismo sistema de representación. Generalmente los alumnos establecen con más regularidad conjunción lógica entre elementos matemáticos en modo gráfico y algebraico.

Gráfico 32. **Nivel Inter 1_ Usa la conjunción lógica correctamente entre los elementos matemáticos**



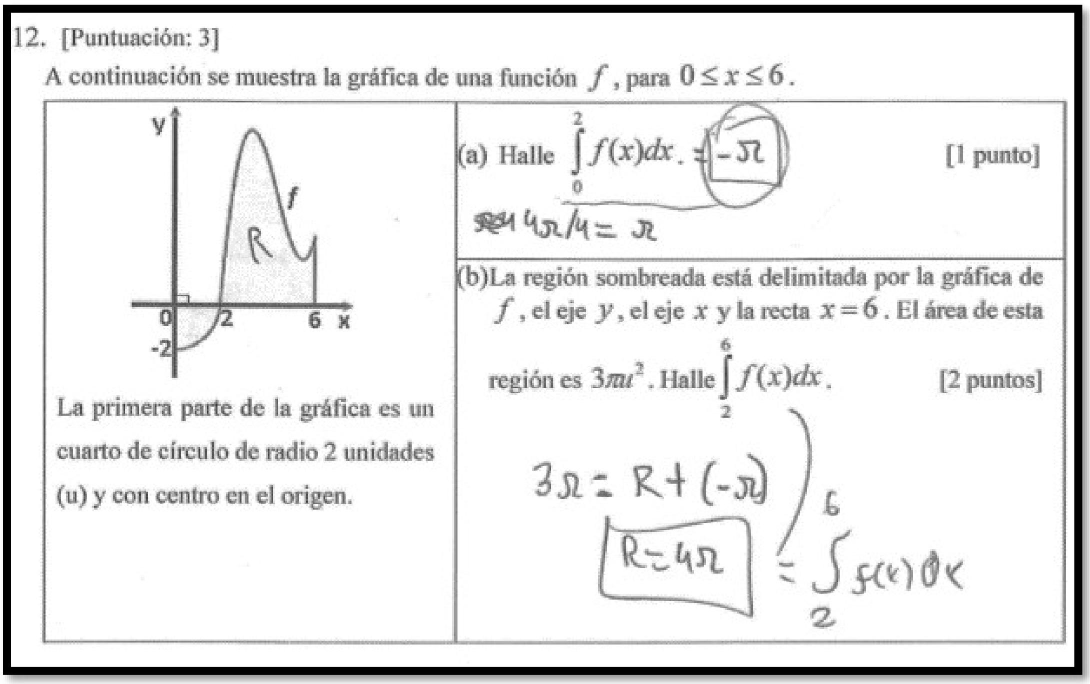


Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el ejemplo, del gráfico obtiene independientemente el área de las regiones rectangulares y realiza un tratamiento algebraico para determinar la suma inferior y superior del área debajo de la curva.

2. “Recuerda algunos elementos matemáticos expresados a través de diferentes forma de representación (gráficos, algebraicos y/ o analíticos)”.
Esta categoría tiene que ver con el uso parcial que el alumno hace de algunos elementos matemáticos que recuerda y que utiliza para resolver problemas en alguno de los tres sistemas de representación, pero que generalmente en este nivel lo hace de forma gráfica y algebraica, aunque algunas veces suele recordar algunos elementos matemáticos de forma analítica.

Gráfico 33. **Nivel Inter 1_ Recuerda algunos elementos matemáticos a través de diferentes forma de representación: gráficos, algebraicos y/ o analíticos**



12. [Puntuación: 3]

A continuación se muestra la gráfica de una función f, para $0 \leq x \leq 6$.

La primera parte de la gráfica es un cuarto de círculo de radio 2 unidades (u) y con centro en el origen.

(a) Halle $\int_0^2 f(x)dx$. $= \boxed{-\pi}$ [1 punto]

$4\pi/4 = \pi$

(b) La región sombreada está delimitada por la gráfica de f, el eje y, el eje x y la recta $x = 6$. El área de esta región es $3\pi u^2$. Halle $\int_2^6 f(x)dx$. [2 puntos]

$3\pi = R + (-\pi)$

$\boxed{R = 4\pi} = \int_2^6 f(x)dx$

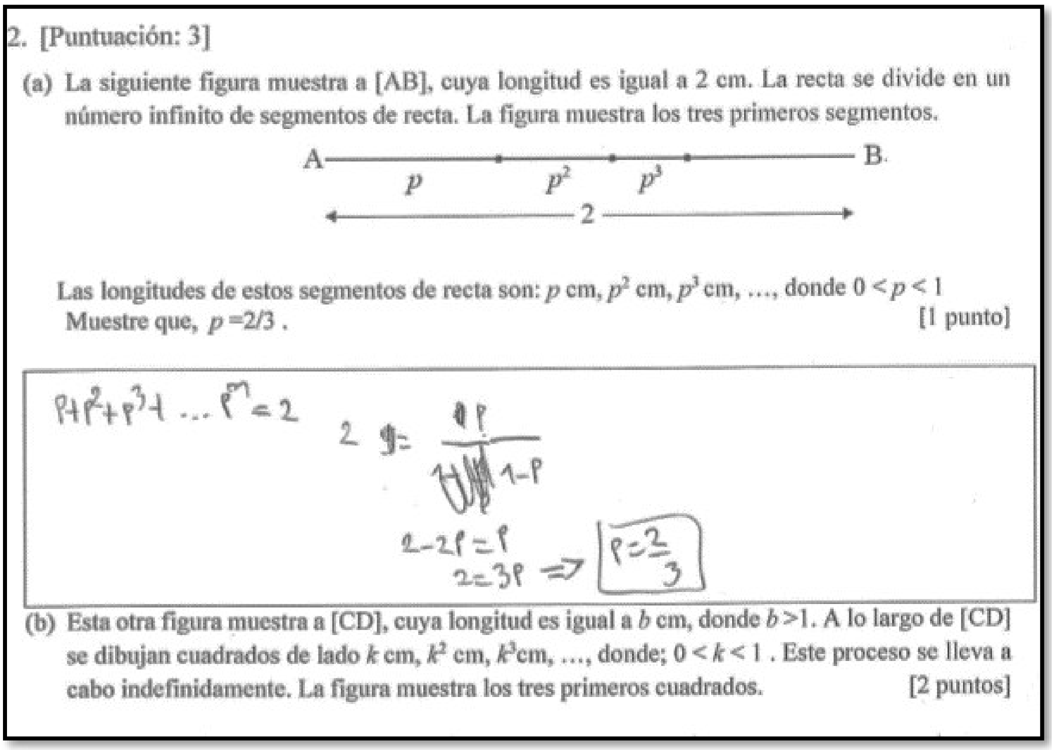
Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el ejemplo, aplicando la integral definida determina que el área del semicírculo es π, sin embargo, al ver que está debajo de la curva lo toma como negativo. Al final concluye que el área del semicírculo es π. En el apartado (b), hay un arrastre de error que repercute en el resultado final.

3. “Tener bosquejo de síntesis de las diferentes formas de representación (gráficos, algebraicos y/ o analíticos)”.

Una manifestación concreta de estas características se establece generalmente cuando el estudiante al resolver una tarea coordina parcialmente el uso de algunos elementos matemáticos haciendo el cambio de registros de representación, es decir que para el alumno la tarea la resuelve pero dependiendo del sistema de representación que utilice.

Gráfico 34. **Nivel Inter 1_ Bosqueja la síntesis de las diferentes formas de representación matemática**



2. [Puntuación: 3]

(a) La siguiente figura muestra a [AB], cuya longitud es igual a 2 cm. La recta se divide en un número infinito de segmentos de recta. La figura muestra los tres primeros segmentos.

Las longitudes de estos segmentos de recta son: p cm, p^2 cm, p^3 cm, …, donde $0 < p < 1$

Muestre que, $p = 2/3$. [1 punto]

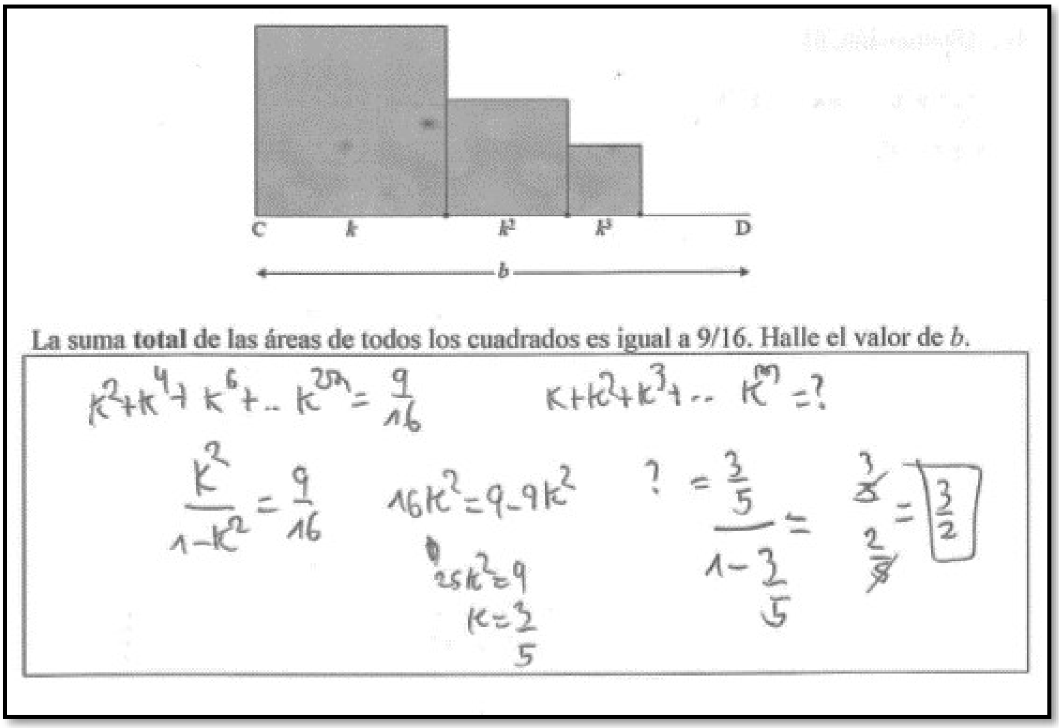
$p+p^2+p^3+\ldots p^n=2$

$2 = \frac{p}{1-p}$

$2-2p=p$

$2=3p \Rightarrow \boxed{p=\frac{2}{3}}$

(b) Esta otra figura muestra a [CD], cuya longitud es igual a b cm, donde $b>1$. A lo largo de [CD] se dibujan cuadrados de lado k cm, k^2 cm, k^3cm, …, donde; $0 < k < 1$. Este proceso se lleva a cabo indefinidamente. La figura muestra los tres primeros cuadrados. [2 puntos]



Fuente. Maurtua, J. (2018)

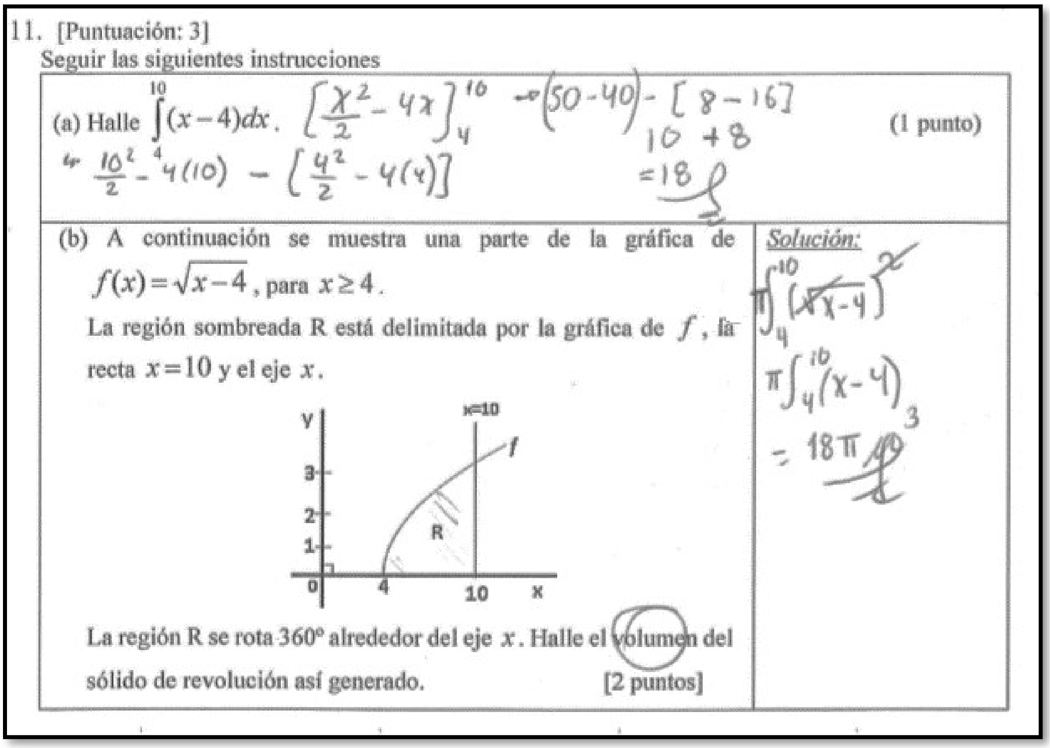
En el ejemplo, asume que el tratamiento de la situación problema pasa por aplicar algebraicamente la suma de términos de una progresión geométrica infinitamente decreciente a partir del gráfico. Sin embargo, aún se observa que el uso de notación matemática no está contemplado.

B.2 El estudiante se encuentra en el nivel inter porque:

1. “Usa diferentes relaciones de tipo lógicos entre elementos o conceptos matemáticos de manera correcta con algunas observaciones (generalmente en el mismo sistema de representación)”.

En este estado se comienza a establecer más de una relación lógica entre los elementos matemáticos usando generalmente en el mismo sistema de representación. Se evidencia además, una tendencia a utilizar frecuentemente la conjunción lógica y la condicional entre elementos matemáticos; el estudiante relaciona dos o más elementos matemáticos, aunque algunas veces el razonamiento puede ser inconcluso; es decir, que el razonamiento que hace el estudiante es incompleto porque no logra concluir la tarea.

Gráfico 35. **Nivel Inter_ Usa diferentes relaciones lógicas entre los conceptos matemáticos de manera correcta**


11. [Puntuación: 3]
Seguir las siguientes instrucciones

(a) Halle $\int_4^{10}(x-4)dx$. $\left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_4^{10}$ $\rightarrow (50-40)-[8-16]$ (1 punto)
$\rightarrow \frac{10^2}{2}-4(10)-\left[\frac{4^2}{2}-4(4)\right]$ $10+8$
$=18$

(b) A continuación se muestra una parte de la gráfica de $f(x)=\sqrt{x-4}$, para $x \geq 4$.
La región sombreada R está delimitada por la gráfica de f, la recta $x=10$ y el eje x.

La región R se rota 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido de revolución así generado. [2 puntos]

Solución:
$\pi\int_4^{10}(\sqrt{x-4})^2$
$\pi\int_4^{10}(x-4)$
$=18\pi$

Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el ejemplo, se observa que el estudiante aplica con idoneidad la regla de Barrow en (a); así mismo, utiliza el resultado hallado para realizar la nueva tarea, estableciendo una relación condicional entre ambos procesos. Sin embargo, aún tiene dificultades con el uso de la notación matemática (obvia el diferencial en el integrando).

2. “Recuerda los elementos o conceptos matemáticos para resolver actividades o tareas en los diferentes registros de representación”.

En este estado de desarrollo de la construcción del esquema de Integral Definida el estudiante suele empezar a recordar y a utilizar los elementos matemáticos necesarios que le permiten hacer un razonamiento lógico y poder resolver así la tarea coordinando generalmente las diversas representaciones matemáticas y su tránsito desde lo gráfico, algebraico y/o analítico.

Gráfico 36. **Nivel Inter_Recuerda los elementos o conceptos matemáticos en la resolución de problemas a través de los registros de representación**

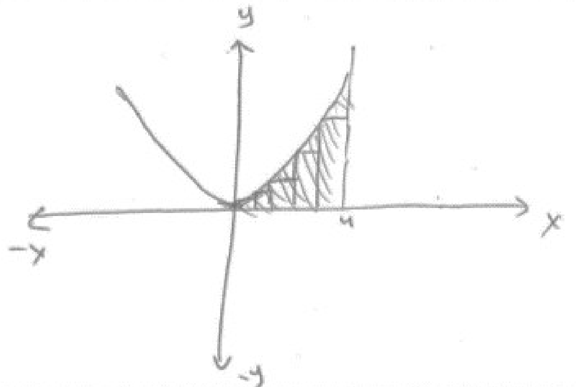
4. [Puntuación: 6]

Sea R la región formada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el intervalo [0,4].

(a) Grafique y **utilice particiones** para aproximar el área de la región R debajo de la curva.

[5 puntos]

(i) Realice aquí su gráfica.



(ii) Escriba el número de particiones que ha utilizado:........4..........................

(iii) Escriba el número de rectángulos que va a considerar para calcular el área:.....4

(iv) Escriba el área de cada rectángulo utilizado:.....1(0)+1(1)+1(4)+1(9) = 14

(v) Halle el **área** debajo de la curva en el intervalo dado.

Realice aquí sus operaciones:

$\Rightarrow A = 1(0+1+4+9)$

$A = 14$

$\Rightarrow \int_0^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$

$\frac{4^3}{3} = \frac{64}{3} = 21,\overline{3}$

(b) Justifique sus resultados y a que conclusión se podría arribar, respecto al número de particiones. [1 punto]

Mientras más particiones el valor se aproximará más al valor real

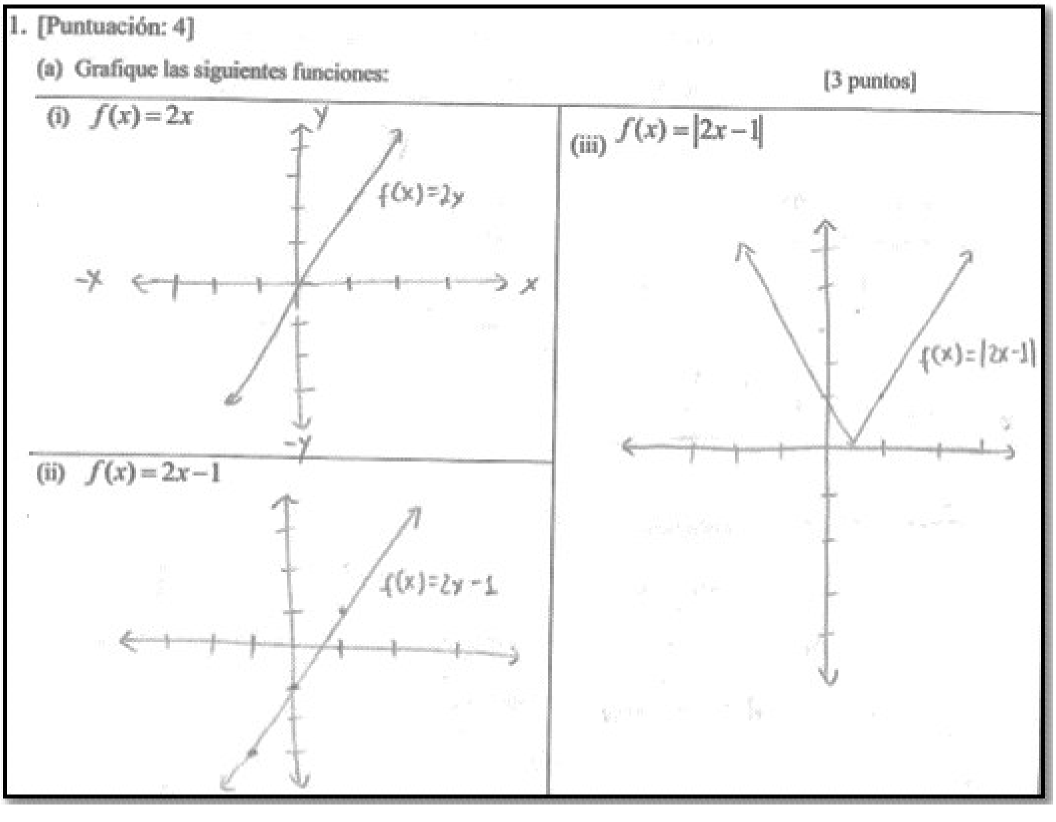
Fuente. Maurtua, J. (2018)

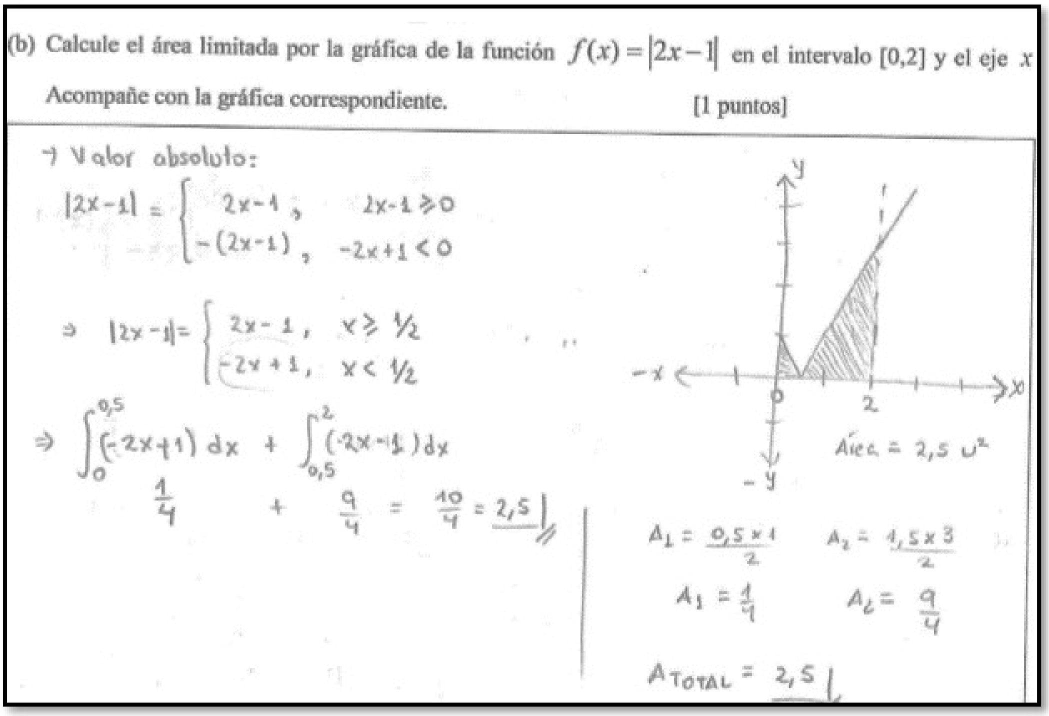
En el ejemplo, se aprecia que el estudiante realiza la gráfica y las particiones (las que cree por conveniente) con idoneidad. Además de un tratamiento analítico y algebraico de situación problemática, establece relaciones lógicas que están asociadas a la aproximación del área según aumenta el número de particiones.

3. "Tiene ideas para sintetizar el uso de las diferentes formas de representación (gráficos, algebraicos y/ o analíticos)".

Una manifestación que caracteriza al nivel de desarrollo del esquema, es cuando el estudiante es capaz de utilizar los mismos elementos matemáticos cambiando entre los sistema de representación gráfica, algebraica y analítica, porque la solución de la tarea depende de lo que sabe hacer con los elementos matemáticos que domina y de la transformación entre sistemas de representación.

Gráfico 37. **Nivel Inter_Tiene ideas de síntesis de las diferentes formas de representación**




(b) Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=|2x-1|$ en el intervalo [0,2] y el eje x. Acompañe con la gráfica correspondiente. [1 puntos]

→ Valor absoluto:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1), & -2x+1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1/2 \\ -2x+1, & x < 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{0,5} (-2x+1)\,dx + \int_{0,5}^{2} (2x-1)\,dx$$

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

Área = 2,5 u^2

$A_1 = \frac{0,5 \times 1}{2}$ $\quad A_2 = \frac{1,5 \times 3}{2}$

$A_1 = \frac{1}{4}$ $\quad A_2 = \frac{9}{4}$

$A_{TOTAL} = 2,5$

Fuente. Maurtua, J. (2018)

En este caso el estudiante muestra idoneidad para graficar una función lineal y una función valor absoluto (en la cual utiliza la definición formal) y estima el área utilizando la geometría analítica y la integral definida, en la cual se tiene conocimiento de las características de la función (valor absoluto) en el tratamiento.

c) Nivel Trans. En este nivel al estudiante le resulta “fácil de definir en función de lo que ya tiene encapsulado, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis, entendidas como el proceso se llega a la conclusión y comprensión de algo que no conocía”. (Piaget y García, 1982, p.167).

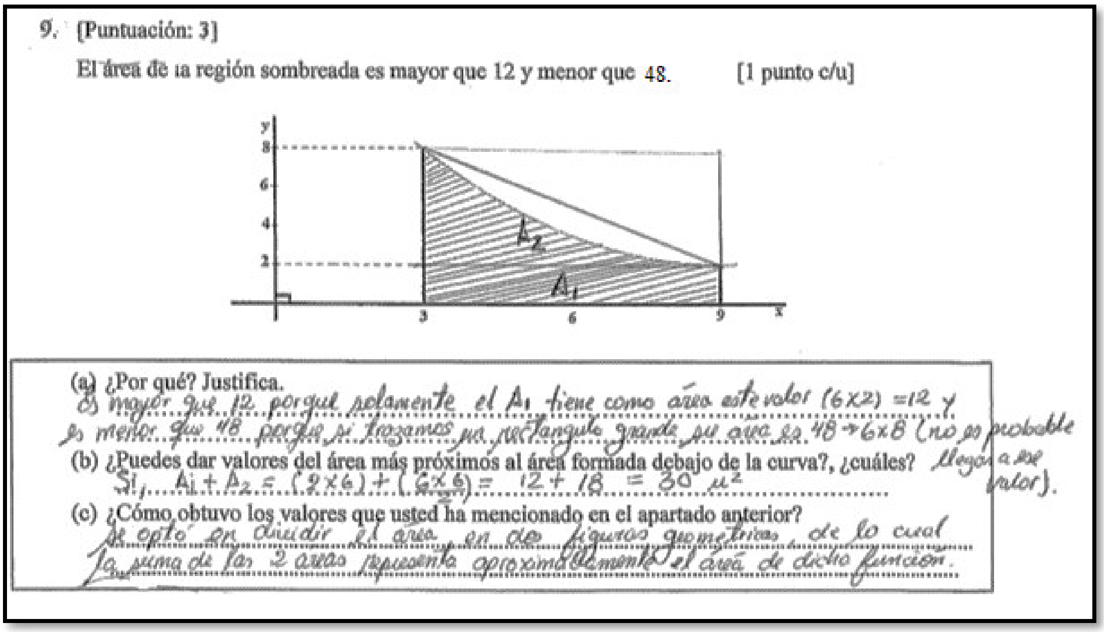
Por su parte De Vries (2001) establece una adaptación de los niveles del desarrollo del esquema que plantea Aldana (2011), considerando características específicas del tratamiento de la integral definida en cada subdivisión de este nivel; tal como se detalla a continuación.

C.1 El estudiante se encuentra en el nivel Trans porque:

1. “Usa diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta”.

La conjunción es la relación lógica que más utilizan los estudiantes en la resolución de las tareas, seguida de la condicional y la relación que menos utilizan los estudiantes es la del contrario de la condicional.

Gráfico 38. **Nivel Trans_Usa diferentes relaciones lógicas entre los elementos matemáticos correctamente**



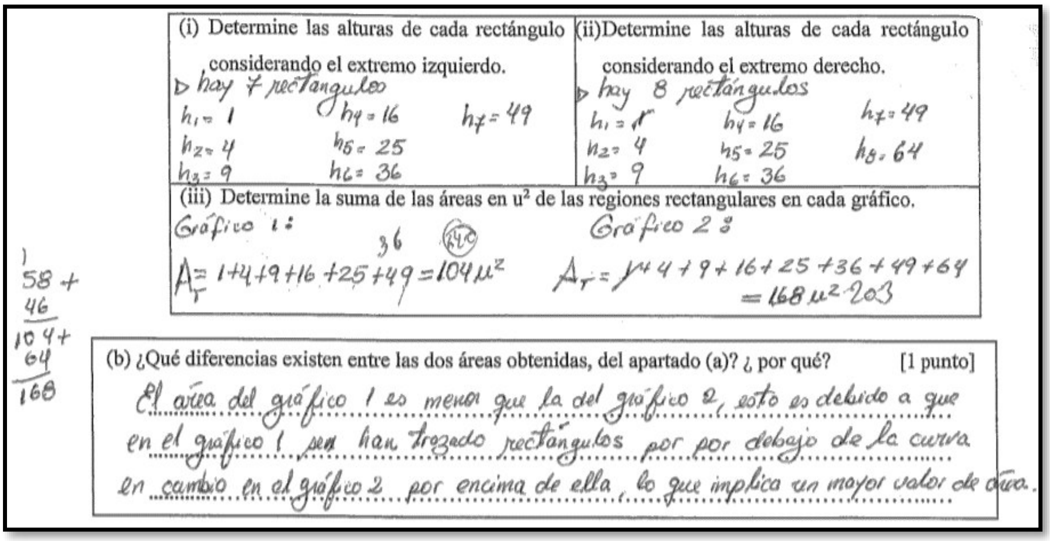
Fuente. Adaptado de Aldana, E. (2011)

En esta actividad el estudiante justifica con coherencia el comportamiento del valor de la región sombreada y da explicaciones que el área máxima no será superior al planteado inicialmente en el problema. Utiliza diversas representaciones para explicar la situación.

2. “Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones”.

Es propio de este nivel que los estudiantes utilicen los elementos que configuran el concepto de integral definida de forma correcta y establezcan las relaciones lógicas necesarias en la resolución de las tareas. Una evidencia de este hecho se presenta cuando el estudiante a lo largo del cuestionario resuelve correctamente todas las tareas.

Gráfico 39. **Nivel Trans_Recuerda elementos matemáticos en la resolución de tareas**



(i) Determine las alturas de cada rectángulo considerando el extremo izquierdo.

hay 7 rectangulos

$h_1 = 1$ $h_4 = 16$ $h_7 = 49$

$h_2 = 4$ $h_5 = 25$

$h_3 = 9$ $h_6 = 36$

(ii) Determine las alturas de cada rectángulo considerando el extremo derecho.

hay 8 rectángulos

$h_1 = 1$ $h_4 = 16$ $h_7 = 49$

$h_2 = 4$ $h_5 = 25$ $h_8 = 64$

$h_3 = 9$ $h_6 = 36$

(iii) Determine la suma de las áreas en u² de las regiones rectangulares en cada gráfico.

Gráfico 1:

$A_T = 1+4+9+16+25+49 = 104u^2$

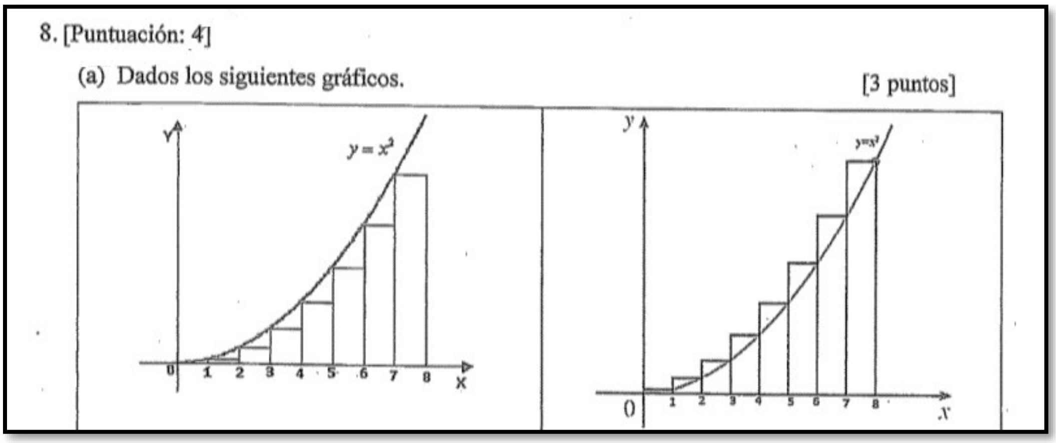
Gráfico 2:

$A_T = 1+4+9+16+25+36+49+64 = 168u^2$ 203

58 + 46 = 104 + 64 = 168

(b) ¿Qué diferencias existen entre las dos áreas obtenidas, del apartado (a)? ¿ por qué? [1 punto]

El área del gráfico 1 es menor que la del gráfico 2, esto es debido a que en el gráfico 1 se han trazado rectángulos por por debajo de la curva en cambio en el gráfico 2 por encima de ella, lo que implica un mayor valor de área.



Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el ejemplo se observa que se completa la tarea utilizando la suma inferior y superior al área debajo de la curva; además se aprecia secuencia, coherencia y uso de notación matemática adecuada en las cuales se establecen conclusiones a partir de los resultados previos.

3. “Tiene la capacidad para sintetizar las diferentes formas de representación (gráficos, algebraicos y/ o analíticos)”.

En este nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida, el estudiante ha logrado construir una estructura coherente del esquema del concepto mediante las relaciones establecidas en el nivel inter. Esta coherencia le permite decidir cuál es el ámbito idóneo de aplicación del esquema. Además, los estudiantes son capaces de utilizar los elementos o conceptos matemáticos para resolver problemas independientemente de las formas de representación: gráfico, algebraico, analítico o los tres a la vez. Un ejemplo que pone de manifiesto esta situación, es el uso que hace el estudiante del elemento matemático área, como aproximación gráfica utilizando figuras planas; algebraica, cuando aplica las fórmulas para hallar el área de regiones planas; como límite de una suma para aproximar el área o como el límite de las suma de Riemann. Esta última permite inferir que, el límite de la suma de Riemann es igual a la integral Definida.

Gráfico 40. **Nivel trans_Tiene capacidad de síntesis de las diferentes formas de representación**

Sea $f(x) = x^2 - 2x; 0 \le x \le 3$.

(a) Grafique y halle la suma de Riemann con n=6 (subintervalos), para ello tome los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. De su respuesta correcta hasta con tres cifras significativas. [6 puntos]

Sumas de Riemamn:

$f(x) = x^2 - 2x$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 1/2$

$x_i = a + i\Delta x$

$x_i = i/2$

→ fórmula de Riemann para n=6

$\sum_{i=1}^{6} f(x_i) . \Delta x$

$\sum_{i=1}^{6} \left(\left(\frac{i}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{i}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{i^2}{4} - i\right) \therefore$

$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{6} i^2 - \sum_{i=1}^{6} i\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\cancel{6}(6+1)(2(6)+1)}{\cancel{6}}\right) - \frac{\overset{3}{\cancel{6}}(6+1)}{\cancel{2}}\right)$

$\frac{7 \times 13}{8} - \frac{21}{2}$

$11,375 - 10,5$

$0,875$

→ Se ha empleado este método para obtener un valor más aproximado.

(b) ¿Qué representa la suma de Riemann? [2 puntos]

La suma de Rieman es una expresión que permite determinar el área bajo la curva de una f(x), la cual se ha dividido en n subintervalos.

Fuente. Adaptado de Aldana, E. (2011)

En este caso, se observa que el estudiante utiliza los conocimientos previos relacionando a la partición de un segmento, la adición de las áreas de las regiones rectangulares utilizando notación de sumatoria. Enfatiza en tratamiento algebraico y analítico, sin dejar de lado la representación gráfica (ya encapsulada del objeto) que permite explicar de alguna manera la relación existente entre la suma límite de Riemann y la integral definida.

En conclusión, en cada nivel de la terna, el estudiante construye o reorganiza de manera gradual el conocimiento adquirido durante el nivel anterior los cuales cambian constantemente variando sus niveles de comprensión. Es por ello, que ante una situación problema un estudiante necesitara coordinar varios esquemas donde cada una de ellas se compone de acciones, procesos, objetos, otros esquemas y transformaciones.

Finalmente presentamos la síntesis de las caracterizaciones de cada uno de los niveles y subniveles de desarrollo del equema de la integral definida que han sido tomadas en cuenta para analizar el nivel de comprensión de los estudiantes del concepto matemático en cuestión en la presente tesis.

Tabla 2. **Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría APOE.**

Nivel	Características
Intra 1	1. No establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. 2. Recuerda sólo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado sólo a un sistema de representación, gráfico, algebraico o analítico. 3. Recuerda elementos matemáticos con errores.
Intra	1. Muestra dificultades en establecer relaciones lógicas (comjunción lógica) entre los elementos matemáticos (intento de relación “conjunción lógica”). 2. Recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada. 3. No tiene sintetizados los sistemas de representación.
Inter 1	1. Usa la conjunción lógica (“y lógica”) de forma correcta entre los elementos matemáticos dados en elmismo sistema de representación.

	2. Recuerda algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/o analíticos. 3. Tiene esbozo de sisntesis de los sistemas de representación garáfico y algebraico.
Inter	1. Usa diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación). 2. Recuerda elementos matemáticos necesarios en la relación de la tareas en varios sistemas de representación (gráfico, algebraico y/o analítico). 3. Tiene esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.
Trans	1. Usa diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condiconal, y la contraria de la condiconal) entre los elementos matemáticos de forma correcta. 2. Recuerda los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tareas, usando los significados implícitos para tomar decisiones. 3. Tiene sintesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Fuente. Aldana, E. (2011, p.145).

2.3.5. Mecanismos para la construcción del esquema de la integral definida

Según Dubinsky (1991) y sus colaboradores, para que los estudiantes realicen abstracciones reflexivas requieren realizar construcciones mentales bajo ciertos mecanismos que se describen a continuación:

a) Interiorización.

Para Piaget, J. (1990), el proceso de interiorización es el resultado de una gama de actividades o acciones concretas que permite al estudiante lograr una operación mental. Tal como sucede cuando los niños manipulan objetos que permiten luego determinar por ejemplo las propiedades de la adición.

Sin embargo, Ramírez (2000) citado por Badillo, E. (2003) señala que, “el proceso de interiorización de una acción es la construcción mental de un proceso, mediante una serie de acciones sobre objetos cognitivos, que pueden ser realizados o imaginados para ser ejecutados en la mente del individuo sin necesariamente llevar a cabo todos los pasos específicos" (p.37).

Al respecto, Asiala (1996), dice que "una acción ha sido interiorizada en un proceso, cuando los individuos reflexionan sobre la acción y construyen una operación interna que realiza la misma transformación".

> Por lo tanto, el proceso de interiorización "debería convertirse en el puente que permita ir de una primera construcción mental (acción) hacia otra de un nivel más sofisticado (proceso). Ordinariamente, muchas de las actividades que diseñamos para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos no contemplan el paso de una construcción mental a otra. Es decir, que no están diseñadas teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes, muy por el contrario se muestran disconexas entre si y lo que propician es la memorización de técnicas y algoritmos que permiten solucionar un tipo concreto de ejercicios, pero que no llegan a interiorizarse en procesos" (Badillo, E., 2003, p 38).

Por ejemplo al plantear ejercicios de este tipo:

1. Hallar la integral definida $I = \int_{1}^{2} x^4 dx$.

2. Si la región formada por la curva $y = x^2$*, delimitada por las rectas* $x = 1$ *y* $x = 2$*; gira 360° respecto al eje x. Calcule el volumen del sólido de revolución formado.*

En (1) se supone interiorizar la acción de hallar la integral definida utilizando las reglas directas de integración. Actividades de este tipo permiten que el estudiante realice procesos mecánicos, algebraicos y poco reflexivos; ya que al integrar una expresión del tipo $\int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx$, no analiza la discontinuidad de la función. En (2) la acción de hallar el volumen de un sólido de revolución implica, solamente la aplicación de la formula $V = \pi \int_{a}^{b} [f(x)]^2 dx$. La acción no enfatiza en el registro de representación gráfica y el contexto en que se podría aplicar el cálculo de este volumen, haciendo obviamente que la actividad sea de poca significatividad.

En realidad, las dos acciones tienen como objetivo solamente hallar la integral definida aplicando reglas de integración directa o la aplicación de una fórmula que permite hallar el volumen. Sin embargo, no se proponen actividades que tiendan puentes o conexiones que permitan interiorizar de manera significativa el concepto de la integral definida –como objeto matemático- a partir de situaciones que partan del contexto real de los estudiantes.

b) Coordinación.

Al respecto, Piaget ya hacía referencia sobre la "coordinación general de acciones"; al respecto Dubinsky (1991), citado por Badillo (2003), afirma que "en la construcción de una nueva acción o de un proceso intervienen dos o más acciones que se relacionan entre sí. Desde luego, hay ejemplos empíricos que muestran la composición o coordinación de dos o más procesos para construir uno nuevo. Por tanto, el proceso de coordinación de acciones o de proceso conduce a la construcción de un nuevo proceso unificador y más sólido" (p 39).

En el caso específico de la integral definida, resulta importante la coordinación de procesos para la construcción de este objeto matemático. En ese sentido, se necesita que los alumnos hayan comprendido e interiorizado ciertos conceptos o nociones previas conexos a la integral definida, como por ejemplo, la definición de la notación sigma, el área de un recinto o región rectangular construidos debajo de la función o curva, partición de un intervalo en subintervalos, necesarios para la comprensión de la suma de Riemann, el valor medio para integrales, el teorema fundamental del cálculo y las aplicaciones para hallar el área debajo de una curva y el volumen de un sólido de revolución.

A continuación, se propone la descomposición genética -desde un análisis de la evolución epistemológica- que permita construir el esquema del concepto de la integral definida propuesta en esta investigación.

En ese sentido, construimos el esquema relacionado al área como aproximación.

1. Dada una función $f(x) > 0; x \in [a,b]$ y continua, la acción de calcular una aproximación por defecto del área de la región plana determinada por la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$.

a. Dividir $[a,b]$ en subintervalos.

b. Calcular el valor mínimo $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ que toma la función en cada subintervalo.

c. Formar rectángulos de base cada subintervalo y de altura el valor mínimo calculado en 1b.

d. Calcular el área de cada uno de los rectángulos obtenidos.

e. Sumar las áreas calculadas en 1d y definir el número obtenido como aproximación del área por defecto.

2. Dada una función $f(x)$ continua y positiva definida en el intervalo $[a,b]$, la acción de calcular una aproximación por exceso del área de la región plana determinada por la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$.

a. Dividir $[a,b]$ en subintervalos.

b. Calcular el valor máximo $M_i = \sup\{f(x) : x \cup [x_{i-1} \leq x \leq x_i]\}$ que toma la función en cada subintervalo.

c. Formar rectángulos de base cada subintervalo y de altura el valor máximo calculado en 2b.

d. Calcular el área de cada región rectangular obtenido.

e. Sumar las áreas calculadas en 2d y definir el número obtenido como aproximación del área por exceso.

3. Interiorización de las acciones anteriores en procesos.

a. Repetir la acción del punto B1 dividiendo cada subintervalo en dos partes iguales y calcular el área de la región así obtenida.

b. Repetir la acción del punto B2 dividiendo cada subintervalo en dos partes iguales y calcular el área de la región así obtenida.

c. Utilizar los resultados obtenidos en los puntos 3a y 3b del proceso, compararlos y buscar una aproximación mejor del área de la figura.

4. Encapsular el proceso desarrollado en el punto 3a en el objeto suma inferior $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

5. Encapsular el proceso desarrollado en el punto 3b en el objeto suma superior $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

c) Inversión.

"Una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo proceso original" (Aldana, 2011, p. 74). Por ejemplo, para la comprensión de la longitud de una curva se parte de la comprensión de la integral definida; para luego establecer procesos (de deducción) propios del concepto longitud de una curva y llegar a su representación matemática.

d) Encapsulación y des-encapsulación.

Según Ramírez (2000) citado por Badillo (2003) "La encapsulación es la transformación mental de un proceso dinámico, el cual se ha interiorizado en una acción, en un objeto cognitivo. Este objeto puede considerarse como una entidad total, y puede actuarse mentalmente sobre el; por medio de acciones y procesos. Bajo estas circunstancias se afirma que un proceso se ha encapsulado en un objeto" (p.39).

En ese orden de ideas, para la encapsulación de un concepto se movilizan una serie de acciones y procesos (proceso dinámico) hasta llegar al concepto propiamente dicho (objeto estático). Por ejemplo, para encapsular el concepto de área se movilizan las siguientes acciones y procesos:

- Definir si f es continua en $[a,b]$, con $f(x)\geq 0$ para toda x en $[a,b]$, y es continua en $[a,b]$.
- Determinar la región R delimitada por la curva $y=f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

- Dividir $[a,b]$ en n subintervalos, cuya longitud es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y al denotar el i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$.
- Identificar que $f(c_i)$ es el valor de la función mínimo absoluto en el i-ésimo subintervalo.
- Comprender que la medida del área de la región R está dada por $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_1)\Delta x$.

En este caso, se han asociado varios procesos como los señalados (proceso dinámico) hasta llegar a la comprensión de como hallar el área debajo de una curva (proceso estático); en ese contexto, se dice que se ha encapsulado el proceso para hallar el área debajo de una curva. Al respecto, Font (2000) citado por Badillo (2003) señala que:

> “cuando se realiza el proceso mental de ir hacia atrás, es decir, del objeto al proceso del cual fue encapsulado, se dice que hemos desencapsulado un objeto en un proceso inicial. Por ejemplo, si tenemos el objeto $f(x)$ lo podemos desencapsular en un proceso que permite al individuo pensar en la función como una asignación a la variable independiente de uno o más valores, que realiza una o más operaciones sobre el conjunto de entrada, y de lo cual se obtienen los valores de la variable dependiente. Es decir, que a partir de la interpretación de un objeto (estático) como lo es $f(x)$, pasamos a centrarnos en otros objetos como la variable independiente y en una secuencia de acciones, bien sean físicas o mentales, que se realizan con estos objetos (proceso dinámico)” (p. 40).

e) Tematización.

Según Badillo, E. (2003) señala que, “cuando un sujeto reflexiona sobre su comprensión del esquema de un concepto, visto como un todo, y es capaz de realizar nuevas acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto…se llega a una nueva estructura mental, que son los esquemas, en esta instancia pueden ser tratados como objetos e incluirse en organizaciones de esquemas de más alto nivel” (p.41).

Tal es el caso de la suma de Riemann que toma como antecedente lo mencionado en la abstracción reflexiva precedente, Veamos:

Sea f una función, definida en $[a,b]$. Dividimos el intervalo en n subintervalos tomando cualquiera de los $n-1$ puntos entre a y b .

Los puntos de la recta son: $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$; y no necesariamente son equidistantes.

La partición Δ contiene n subintervalos, de los cuales uno de estos es el más largo; sin embargo, puede haber más de uno. Su longitud se llama norma de la partición y se denota por $|\Delta|$. Al determinar determinar la longitud de cada intervalo ($\Delta_i x$) tenemos:

Intervalo	Representación
1er	$\Delta_1 x = x_1 - x_0$
2do	$\Delta_2 x = x_2 - x_1$
…	…
i-ésimo	$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$

Si elegimos un punto de cada subintervalo de la partición, por ejemplo; $w_1 \in [x_0, x_1]$ o $w_2 \in [x_1, x_2]$ y así sucesivamente, donde w_i es un punto de $[x_{i-1}, x_i]$ y $x_{i-1} \le w_i \le x_i$; entonces la suma límite de las áreas será, $f(w_1)\Delta_1 x + f(w_2)\Delta_2 x + ... + f(w_i)\Delta_i x + ... + f(w_n)\Delta_n x$, que es lo mismo que $\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$. (Suma de Riemann).

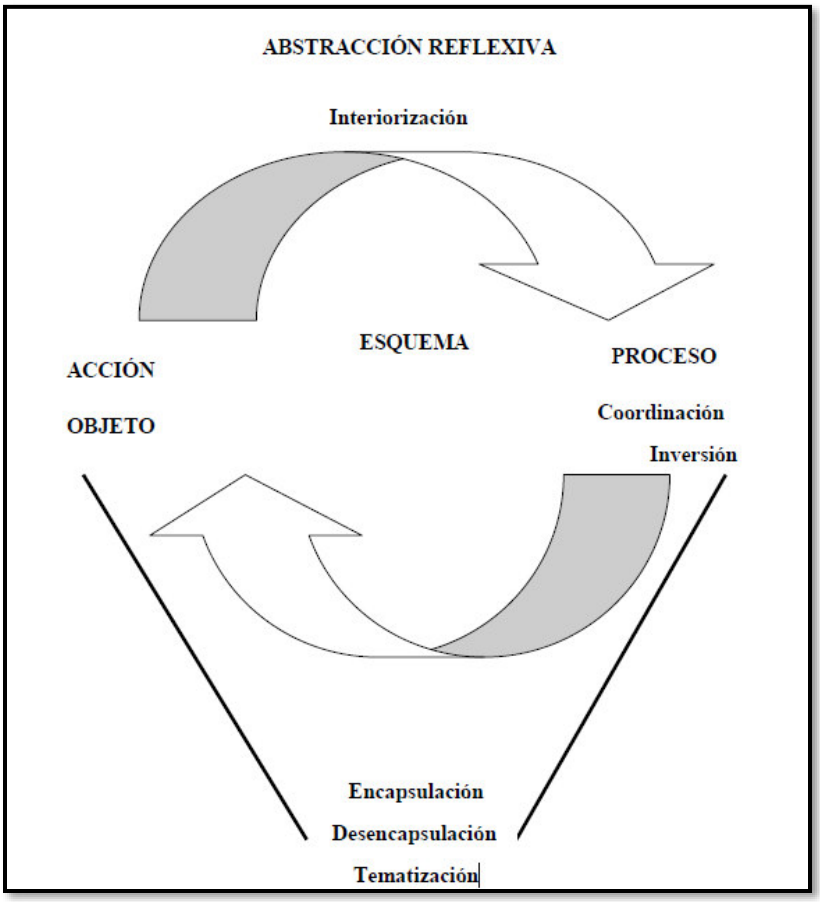
En la misma perspectiva teórica, Sfard (1991) citado por Aldana (2013), “señala que los conceptos matemáticos abstractos pueden ser concebidos desde dos perspectivas. Una como concepciones operacionales (procesos, algoritmos y acciones) y otra como concepciones estructurales (conceptos matemáticos considerados objetos abstractos), donde las concepciones operacionales son previas a las concepciones estructurales" (p.61).

En ese sentido, para transitar desde las concepciones concretas, físicas u operacionales a las estructurales mentales se requieren considerar las siguientes fases: "a) Interiorización. Fase en que el estudiante se familiariza con los procesos que darán lugar al nuevo concepto. Estos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel elemental y que se van construyendo de forma gradual, en la medida que el sujeto va adquiriendo las habilidades propias de dichos procesos. b) Condensación. Es un periodo de cambio en el que se concentran largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. Aquí, el estudiante se siente capaz de pensar en un proceso dado como un todo, en términos de entrada y salida, sin necesidad de considerar todos los detalles que lo componen. En esta fase se puede dar nombre al concepto que nace, se hace más factible combinar procesos, hacer generalizaciones y aumentar las posibilidades de hacer representaciones del concepto. Este periodo dura mientras la nueva entidad permanece ligada a un cierto proceso. c) Reificación. Es el momento en que el estudiante es capaz de pensar en la nueva noción como un objeto en sí mismo con sus propias características. La reificación se define en términos más generales como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar con una perspectiva totalmente nueva" (Aldana, 2013, p.62).

En este modelo teórico de la reificación (Sfard, 1992) un concepto matemático pasa de proceso a objeto abstracto y de éste, a un nivel más superior, para construir constructos matemáticos más avanzados. La diferencia entre condensación y reificación radica en que la condensación es un cambio técnico de aproximación que se traduce en la habilidad para trabajar con un proceso sin considerar todos los pasos, constituyéndose de forma gradual y cuantitativa. La reificación sin embargo, debe ser entendida como un salto cualitativo e instantáneo. Aunque un concepto haya sido bien interiorizado y condensado en una entidad propia, no significa que se haya adquirido la capacidad de pensar sobre éste como un todo estructural. En este sentido si no se ha realizado la reificación del concepto, su manejo no deja de ser puramente operacional.

A continuación presentamos la dinámica de la obtención de una abstracción reflexiva, que en cierta medida han sido consideradas en la investigación.

Gráfico 41. **Abstracción Reflexiva en el marco teórico de la teoría APOE**



Fuente. Dubinsky (1991)

2.3.6. Descomposición genética del concepto de la integral definida

Para Hernández, L. y Trigueros, M. (2012), descomponer genéticamente un concepto matemático para su comprensión, implica un proceso de construcción "[...] a partir del análisis de las construcciones cognitivas previas que se requieren para el aprendizaje de dicho concepto. En ella se incluyen las acciones, los procesos y la forma en que estos se coordinan e interiorizan, de tal forma que se posibilite el encapsulamiento del concepto [...]" (p. 71).

Por tanto, una descomposición genética es “un modelo cognitivo donde se describen las posibles construcciones mentales que un estudiante realiza para entender un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas, y son descritas en el marco de la teoría APOE de Dubinsky (1996) y Asiala et al. (1996), donde se trata de explicar el entendimiento de un concepto mediante las construcciones mentales y los mecanismos de construcción” (Aldana, 2013, p.67).

Las descomposiciones genéticas son una manera de plantear las hipótesis de cómo se construyen los conceptos matemáticos mentalmente. Asiala, M. (1996, p. 7), citado por Aldana, E. (2013) señala que la descomposición genética del concepto es un “conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del alumno*”* (p.67)*.* Para el grupo RUMEC la descomposición genética “es el primer paso del análisis teórico de un concepto matemático en término de las construcciones mentales que un aprendiz puede llagar hacer en orden de desarrollar la comprensión del concepto” (De Vries, D., 2001, p.4). En ese orden de ideas, la descomposición genética es un mecanismo que abre paso para el aprendizaje consiente de un concepto matemático; entendiendo que, hay varias formas de descomponer un concepto que va estar supeditada a las nociones y los conocimientos previos con las que cuenta el estudiante, que en palabras de Trigueros, M. (2005), “pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto en estudio” (p.8).

Las investigaciones en Teoría APOE, parten de una descomposición genética inicial del concepto de interés y está constituida por el diseño de un análisis de los instrumentos teóricos que son piezas claves en la construcción del conocimiento, y las relaciones lógicas establecidas entre estos elementos que configuran el concepto en cuestión, donde se incluyen las construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para aprenderlo. El diseño se basa propiamente en la experiencia del profesor o del investigador y de esta manera se fomenta la construcción de esquemas necesarios para el aprendizaje del concepto que se desea estudiar.

A continuación se presenta la descomposición genética del concepto de la integral definida en la presente investigación:

a) Conocimientos Previos.

a. Sumatoria y Suma de *n* términos de una sucesión.

b. Partición de un intervalo.

c. Límite de la suma de *n* términos de una sucesión.

b) El área como aproximación.

1. Dada una función $f(x) > 0; x \in [a,b]$ y continua, la acción de calcular una aproximación por defecto del área de la región plana determinada por la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$.

a. Dividir $[a,b]$ en subintervalos.

b. Calcular el valor mínimo $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$ que toma la función en cada subintervalo.

c. Formar rectángulos de base cada subintervalo y de altura el valor mínimo calculado en 1b.

d. Calcular el área de cada uno de los rectángulos obtenidos.

e. Sumar las áreas calculadas en 1d y definir el número obtenido como aproximación del área por defecto.

2. Dada una función $f(x)$ continua y positiva definida en el intervalo $[a,b]$, la acción de calcular una aproximación por exceso del área de la región plana determinada por la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$.

a. Dividir $[a,b]$ en subintervalos.

b. Calcular el valor máximo $M_i = \sup\{f(x) : x \cup [x_{i-1} \le x \le x_i]\}$ que toma la función en cada subintervalo.

c. Formar rectángulos de base cada subintervalo y de altura el valor máximo calculado en 2b.

d. Calcular el área de cada uno de los rectángulos obtenidos.

e. Sumar las áreas calculadas en 2d y definir el número obtenido como aproximación del área por exceso.

3. Interiorización de las acciones anteriores en procesos.

a. Repetir la acción del punto b1 dividiendo cada subintervalo en dos partes iguales y calcular el área de la región así obtenida.

b. Repetir la acción del punto b2 dividiendo cada subintervalo en dos partes iguales y calcular el área de la región así obtenida.

c. Utilizar los resultados obtenidos en los puntos 3a y 3b del proceso, compararlos y buscar una aproximación mejor del área de la figura.

4. Encapsular el proceso desarrollado en el punto 3a en el objeto suma inferior $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

5. Encapsular el proceso desarrollado en el punto 3b en el objeto suma superior $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

c) El área como límite de una suma.

6. Desencapsular los objetos 4 y 5, y coordinar con los procesos realizados en 3c en el proceso del límite de las sumas inferior y superior.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_1)\Delta x$$

$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_1)\Delta x$; donde: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

d) La Integral Definida.

7. Comprobar que los límites obtenidos en el proceso 6 son iguales, encapsular el proceso en el objeto integral definida de la función *f* en $[a,b]$.

8. Desencapsulación del objeto 7 en el proceso de cálculo de la integral definida, de *f* sobre $[a,x]$; Intervalo cerrado con extremo en a y otro extremo variable.

9. Encapsulación del proceso 8 en el objeto función integral $F(x)=\int_a^x f(x)dx$

e) El Teorema Fundamental del Cálculo.

10. Acción de calcular una función primitiva.

a. Cálculo de la derivada de la función F(x).

b. Comprobación de que la derivada de F(x) es f(x).

c. Definición de F(x) como función primitiva.

d. Expresar la función primitiva como F(x) +C.

11. Interiorización de la acción 10 en el proceso de cálculo de una función primitiva.

12. Coordinación del proceso 11 con,

a. El proceso de evaluar una función primitiva en los extremos del intervalo.

b. Calcular la diferencia entre esos valores.

c. Comprobación de que la cantidad así obtenida es igual a $\int_a^b f(x)dx$

f) Formalización conceptual de la integral definida para funciones no estrictamente positivas y continua.

13. Aplicar el proceso 11 para el cálculo de integrales definidas de funciones positivas continuas.

14. Aplicar el proceso 11 para funciones no estrictamente positivas y continuas dividiendo el intervalo de definición en subintervalos según el signo de la función.

15. Aplicar el proceso 11 para el cálculo de Integrales Definidas de funciones positivas discontinuas.

16. Aplicar el proceso 11 para funciones discontinuas no estrictamente positivas dividiendo el intervalo de definición en subintervalos según el signo de la función.

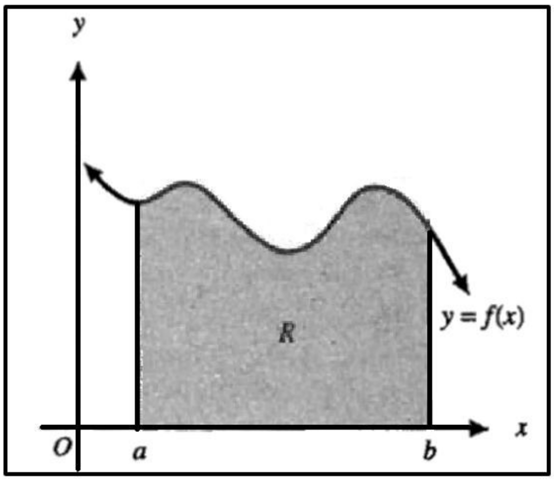
2.3.7. Desarrollo conceptual de la integral definida

En el tratamiento de la integral definida, se realizará una revisión al cálculo de las primitivas, el problema de las áreas, la suma de Riemann, la integral definida, la regla de Barrow y el teorema fundamental del cálculo, el cálculo de áreas de regiones planas y volúmenes de sólidos de revolución. Cabe precisar que la integral definida no solamente nos provee de una definición de área y un medio para calcularla, sino que también nos permite definir y calcular muchas magnitudes físicas: trabajo, centro de masa, momento de inercia, energía potencial, entre otros.

2.3.7.1. Área de una región plana. Para la comprensión de este concepto se debe tener claro que la medida del área está referido a número, que no incluye unidades de medida. Por ejemplo, si un trapecio rectángulo tiene como área igual a 20 m^2, se dice que la medida del área del trapecio rectángulo (en m^2) es, 20.

Si R, es una región delimitada en el plano cartesiano, tal como se muestra en el gráfico (42);

Gráfico 42. **Región debajo de una curva**



Fuente. Leithold, L (1998)

Tenemos que f es continua en $[a,b]$ y la región R está delimitada por el eje positivas de las abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$. Además si $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$ y A la medida del área de R; entonces, para estimar el área en $[a,b]$, se realizarán las particiones en n subintervalos cuyas longitudes (Δx) son iguales; En ese sentido, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Así mismo, los puntos $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ son los extremos de los subintervalos, donde; $x_0 = a$, $x_1 = a+\Delta x$,....., $x_i = a + i\Delta x$,...., $x_{n-1} = a+(n-1)\Delta x$, $x_n = b$.

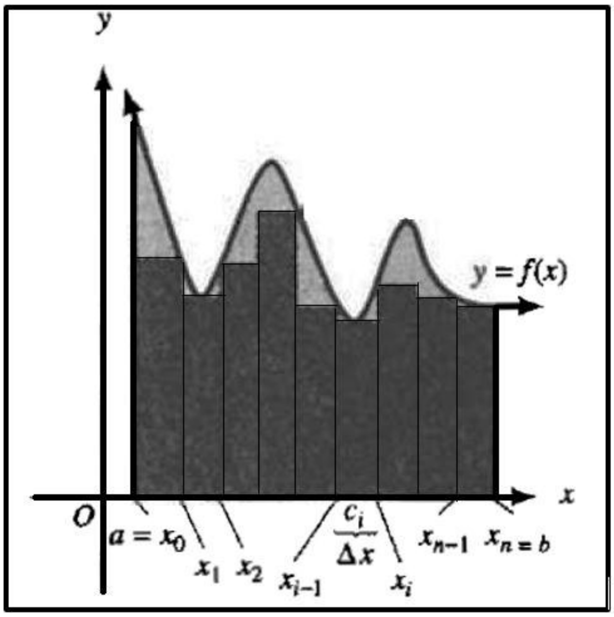
El subintervalo i-ésimo se denota por $[x_{i-1}, x_i]$, en la que f al ser continua en $[a,b]$, entonces también es continua en cada subintervalo.

Si c_i es un número del i-ésimo subintervalo, de manera que $f(c_i)$ es el valor mínimo absoluto de f en $[x_{i-1}, x_i]$; y considerando los n rectángulos con ancho de base Δx unidades y altura de $f(c_i)$ unidades, obtenemos la suma (S_n) en unidades cuadradas tal como se muestra;

$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_i)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x$, que es equivalente a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_1)\Delta x \qquad (1)$$

Gráfico 43. **Región formada por n rectángulos inscritos**



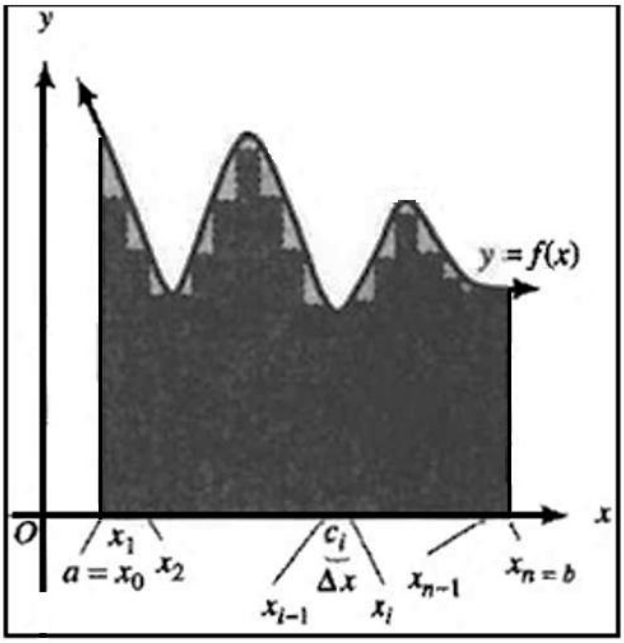
Fuente: Leithold, L (1998)

La ecuación (1) determina la sumatoria de las medidas de las áreas de los n rectángulos formados debajo de la curva (inscritos).

Independientemente de cómo se defina A, debe ser tal que $A \geq S_n$, en unidades cuadradas.

Si se duplica el número de rectángulo n, el ancho de la base de cada rectángulo se reduce a la mitad.

Gráfico 44. **Región formada por 2n rectángulos inscritos**



Fuente. Leithold, L. (1998)

Al comparar los gráficos (43 y 44), la segunda se acerca más a la región R; en consecuencia su medida del área está más acerca la medida del área de la región R.

En conclusión, mientras más se incrementa el número de subintervalos *n*, los valores de S_n definidos en el gráfico 44 aumentan. Cabe señalar que los valores sucesivos de S_n se diferencian en cantidades muy pequeñas. En consecuencia, si en $[a,b]$, f es continua y n aumenta sin límites, entonces el S_n (1) se acerca más y más al valor exacto del área de la región formada. Por lo tanto, el límite representa la medida del área del recinto R.

2.3.7.2 Definición de un área de una región plana. "Suponiendo que la función f es continua en $[a,b]$, con $f(x) \geq 0$ para toda x en [a,b], entonces R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Dividiendo el intervalo [a,b] en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, y denotando el i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$, entonces $f(c_i)$

es el valor mínimo absoluto de la función en el i-ésimo subintervalo y la medida del áreas de la región R está, dada por; $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_1)\Delta x$" (Ibidem, p.343). (2)

Si consideramos a $f(d_i)$ como el valor máximo de la función en $[x_{i-1}, x_i]$, entonces, las medidas del todas las áreas del recinto R está representado por;

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(d_1)\Delta x \tag{3}$$

Donde $f(d_1)$ es el máximo valor de f en $[x_{i-1}, x_i]$.

Cabe precisar que la altura del rectángulo en $[x_{i-1}, x_i]$ podría ser la misma función en cualquier subintervalo. En ese sentido, la medida del área será el mismo si cogemos cualquier punto de $[x_{i-1}, x_i]$.

Ejemplo:

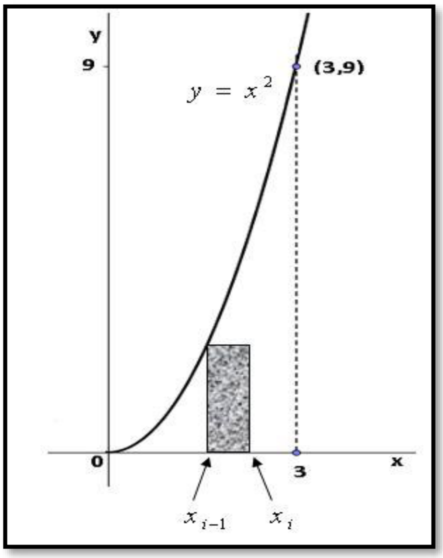
Determine la medida del área del recinto delimitado por $y=x^2$ y las rectas $x=0$ y $x=3$; Considerando un número adecuado de rectángulos debajo de la curva.

Solución:

Si dividimos el intervalo $[0,3]$ en n subintervalos de ancho Δx ; se tiene:

$x_0=0$; $x_1=\Delta x$; $x_2=2\Delta x$ ....., $x_i=i\Delta x$,...., $x_{n-1}=(n-1)\Delta x$, $x_n=3$. De dónde, $\Delta x=\dfrac{3-0}{n}=\dfrac{3}{n}$. Al considerar $f(x)=x^2$ y su gráfica tenemos;

Gráfico 45. **Región delimitada por la curva** $y = x^2$



Fuente. Maurtua, J. (2018)

Como f es creciente en $[0,3]$, el mínimo valor absoluto de f en $[x_{i-1}, x_i]$ es $f(x_{i-1})$; por lo tanto, de (2), tenemos:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Debido a que $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$ y $f(x) = x^2$, entonces $f(x_{i-1}) = [(i-1)\Delta x]^2$.

Por tanto,

$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 (\Delta x)^3$, pero $\Delta x = \frac{3}{n}$ entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \frac{27}{n^3} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

$$= \frac{27}{n^3} (\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1)$$

Al aplicar las fórmulas de sumatorias obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{27}{n^3} (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{27}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2 - 6bn + 6n}{6}\right)$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{2n^3 - 3n + 1}{n^2}\right)$$

De (2)

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}\left(\frac{2n^3 - 3n + 1}{n^2}\right)$$

$$A = \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$A = \frac{9}{2}(2 - 0 + 0)$; entonces $A = 9$

Por lo tanto, el área del recinto es 9 u^2.

2.3.7.3. La suma de Riemann. Dadas las particiones (Δ) en $[a, b]$ como se muestra.

Uno de los subintervalos tiene mayor longitud (denominado norma) y se denota por $|\Delta|$. Si tomamos un punto cualquiera w_i de cada subintervalo tenemos que; si $w_1 \in [x_0, x_1]$, entonces, $x_0 \le w_1 \le x_1$; si $w_2 \in [x_1, x_2]$, entonces, $x_1 \le w_2 \le x_2$ y así sucesivamente; por lo tanto; si $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces, $x_{i-1} \le w_i \le x_i$.

Al sumar todas las áreas de las regiones rectangulares tenemos que: $f(w_1)\Delta_1 x + f(w_2)\Delta_2 x + \ldots.. + f(w_i)\Delta_i x + \ldots.. + f(w_n)\Delta_n x$

O bien; $\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$ (Suma de Riemann) (4)

Ejemplo

Dada la función $f(x) = 10 - x^2; \forall x \in [0, 25; 3]$. Calcule la suma (Riemann) en f, en el dominio dado.

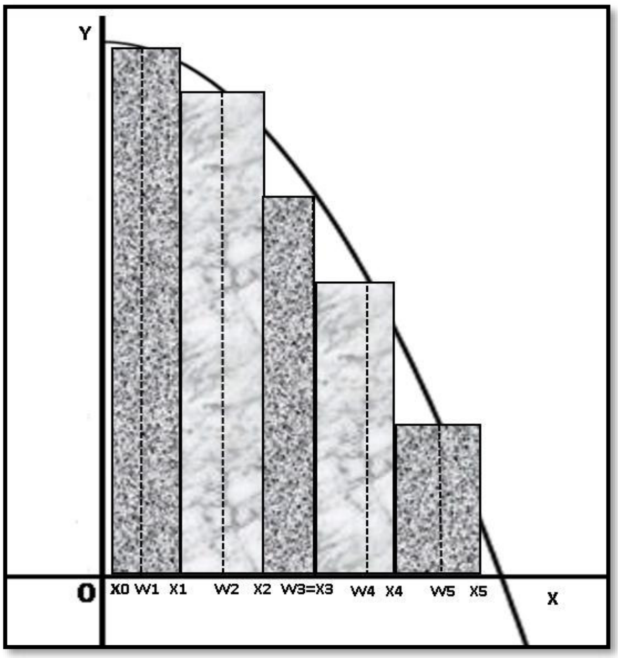
Solución: Haciendo las siguientes particiones Δ :

$x_0 = 0,25;\ x_1 = 1;\ x_2 = 1,5;\ x_3 = 1,75;\ x_4 = 2,25;\ x_5 = 3$ y

$w_1 = 0,5;\ w_2 = 1,25;\ w_3 = 1,75;\ w_4 = 2;\ w_5 = 2,75;$

Tal como se muestra en la figura.

Gráfico 46. **Región particionada a través de 5 rectángulos**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

La figura adjunta muestra las 5 regiones rectangulares cuyas áreas corresponden a los términos de la suma de Riemann, es decir;

$$\sum_{i=1}^{5} f(w_i)\Delta_i x = f(w_1)\Delta_1 x + f(w_2)\Delta_2 x + f(w_3)\Delta_3 x + f(w_4)\Delta_4 x + f(w_5)\Delta_5 x$$

$$= f(0,5)(1-0,25) + f(1,25)(1,5-1) + f(1,75)(1,75-1,5) + f(2)(2,25-1,75) + f(2,75)(3-2,25)$$

$$= (9,75)(0,75) + (8,4375)(0,5) + (6,9375)(0,25) + (6)(0,5) + (2,4375)(0,75)$$

$$= 18,09375\,.$$

2.3.7.4. Función integrable en [a,b]**.** **"**Sea f una función con dominio que contiene a [a,b]. Se dice que f es integrable en [a,b], si L es un número que cumple con la condición que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para toda la partición Δ para la cual $|\Delta| < \delta$ y para cualquier w_i del intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,3,\ldots,n$; entonces,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x - L\right| < \varepsilon \tag{5}$$

Esta situación se presenta como

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x = L\text{”} \text{ (Leithold, L., 1998, p.340)} \tag{6}$$

2.3.7.5. La integral definida. **“**Si f es una función definida en el intervalo cerrado [a,b], entonces la integral definida de f de a a b, se denota por: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$ (7)

Si el límite existe” (Ibidem, p. 341).

Dónde:

- $f(x)$ es el integrando.
- a es el límite inferior.
- b es el límite superior.

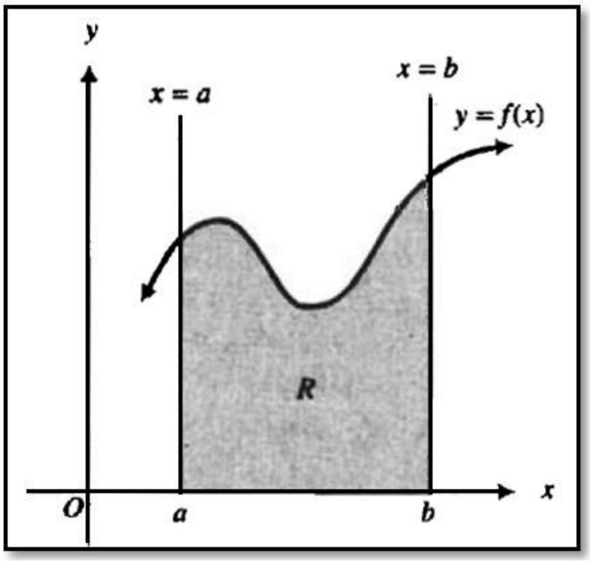
Teorema: “Si una función es continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces es integrable en [a,b]” (Ibídem, p.342).

De lo anterior, se concluye que si f es continua en [a,b] garantiza la integración en [a,b], pero no asegura la existencia de la integral definida. Por ejemplo cuando queremos integrar $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$.

2.3.7.6. Área de una región plana I. “Sea f una función continua en $[a,b]$ y $f \geq 0$ para toda x en [a,b]. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces la medida A del área de la región R está dada por $A = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$ que es equivalente a;

$$A = \int_a^b f(x)dx\text{” (Ibídem, p.343).} \tag{8}$$

Gráfico 47. **Región formada debajo de una curva**



Fuente. Leithold, L (1998)

- Definición: "Si a > b y $\int_a^b f(x)dx$ existe, entonces, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$" (Ibídem, p.345).

  Ejemplo

  $\int_3^0 x^3 dx = -\int_0^3 x^3 dx$.

- Definición: "Si $f(a)$ existe, entonces, $\int_a^a f(x)dx = 0$" (Idem)

  Ejemplo

  $\int_1^1 x^2 dx = 0$

- Teorema: "Si Δ es una partición del intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b-a$." (Ibídem, p.346).

- Teorema: "Si k es cualquier constante, entonces $\int_a^b kf(x)dx = k(b-a)$" (Idem).

Demostración:

Si $a > b$ entonces $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$.

Si $f(x) = k$ para todo x en $[a,b]$, de la ecuación anterior se tiene;

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\Delta_i x$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k(b-a)$$

Ejemplo:

Evalúe $\int_{-3}^{5} 4dx$.

Solución:

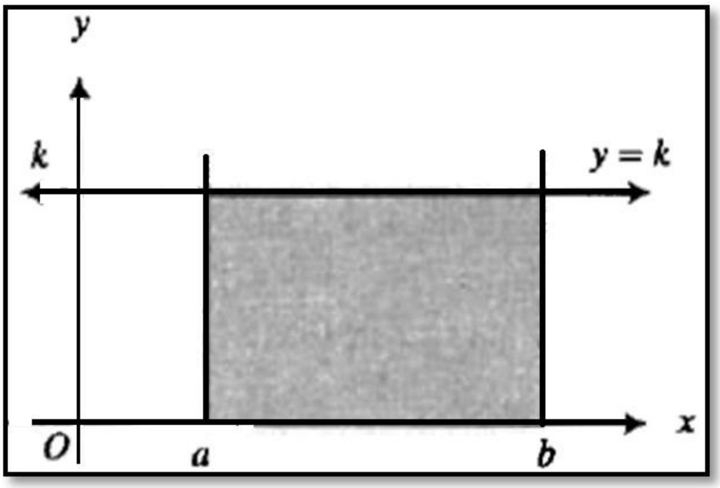
$$\int_{-3}^{5} 4dx = 4(5-(-3)) = 4(8) = 32.$$

- Teorema: "Si f está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, y si

  $\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$, existe" (Idem).

  Donde Δ es cualquier partición de $[a,b]$, entonces si k es cualquier constante;

  $$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(w_i)\Delta_i x = k\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$$



- Teorema: "Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$, y si k es cualquier constante, entonces $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$"(Ibídem, p.347).

Demostración:

Como f es integrable en $[a,b]$ y $\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$, existe;

Entonces, $\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(w_i)\Delta_i x = k\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$

Por tanto, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

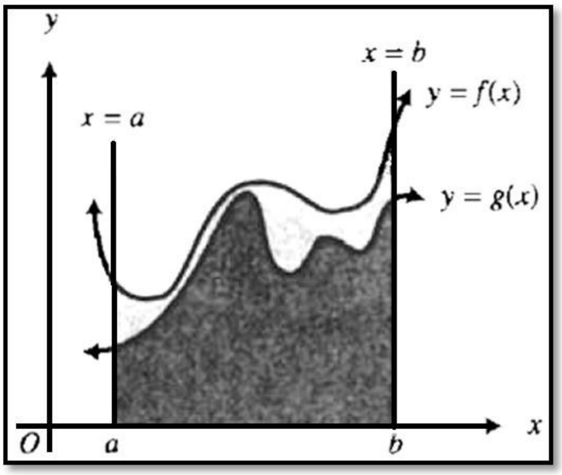
- Teorema: “Si las funciones f y g son integrables en $[a,b]$, entonces $f+g$ es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x))dx$”(Ibídem, p.34).
- Teorema: “Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a,b]$, $[a,c]$ y $[c,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

  Donde $a<c<b$”(Ibídem, p.349).
- Teorema: “Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números a,b y, c entonces, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Sin importar el orden de a,b y, c” (Idem).

2.3.7.7. Teorema del valor medio (TVM) para integrales definidas.

Dada la siguiente gráfica y $f(x)\geq g(x)\geq 0$, para toda x en $[a,b]$.

Gráfico 48. **Teorema del Valor Medio**



Fuente. Leithold, L (1998)

La integral definida $\int_a^b f(x)dx$, permite calcular el área del recinto delimitado por f, el eje de las abscisas y las rectas perpendiculares $x=a$ y $x=b$. Por otro lado la integral definida $\int_a^b g(x)dx$ permite calcular el área de la región delimitada por g y rectas perpendiculares $x=a$ y $x=b$.

De la gráfica (48) nos permite observar la región delimitada por la primera función es mayor que la delimitada por la segunda función; en esas misma dirección están las medidas de sus respectivas áreas.

De este hecho, se deriva interpretaciones geométrica de las siguientes proposiciones cuando $f(x), g(x) \geq 0$ en $[a,b]$.

- Teorema: "Si las funciones f y g son integrales en $[a,b]$, y si $f(x) > g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, entonces, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$" (Ibídem, p. 352).

  Demostración:

  Si f y g son integrales en $[a,b]$; se tiene que,

  $$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

  Si se define h como $h(x) = f(x) - g(x)$.

  Se tiene que, $h(x) \geq 0; \forall x \in [a,b]$, puesto que, $f(x) \geq g(x); \forall \in [a,b]$.

  Ahora se demostrará que $\int_a^b h(x)dx \geq 0.$

  Para ello partimos de $\int_a^b h(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\Delta_i x$, supongamos que

  $$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\Delta_i x = L < 0 \qquad (9)$$

  Entonces, para $\varepsilon = -L$, existe una $\delta > 0$ tal que

  $$\text{Si } |\Delta| < \delta \text{, entonces } \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\Delta_i x = L < -L \qquad (10)$$

  $$\Leftrightarrow \text{ Si } |\Delta| < \delta \text{, entonces } \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\Delta_i x < 0$$

Esta proposición es falsa, ya que cada $h(w_i)$ es no negativo y cada $\Delta_i x > 0$; de manera que existe una contradicción en (10); Por tanto $\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\Delta_i x \geq 0$, además,

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0$$

Como $h(x) = f(x) - g(x)$, se tiene

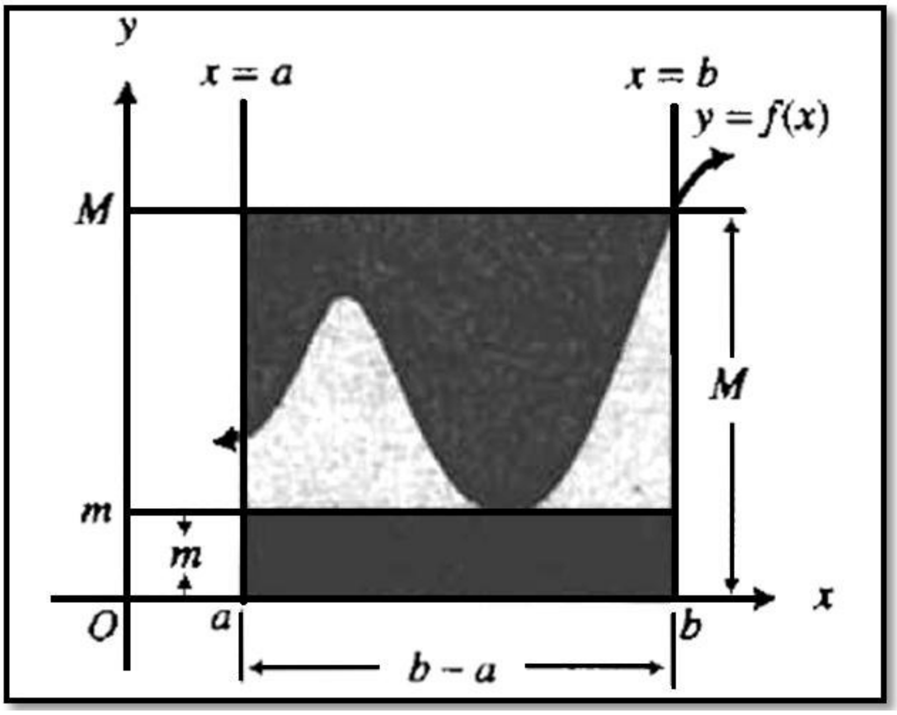
$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Del análisis precedente, donde $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$; se determina la imagen m representa al valor mínimo absoluto y la imagen M representa al máximo absoluto de f en $[a,b]$, tal como se muestra a continuación;

Gráfico 49. **Aplicación del Teorema del Valor Medio**



Fuente. Leithold, L (1998)

La integral $\int_a^b f(x)dx$ en este caso nos permite calcular el área del recinto delimitada por f , las rectas perpendiculares $x=a$, $x=b$, y el eje positivo de las abscisas. La gráfica a priori nos permite afirmar que el área con las consideraciones anteriores es mayor al área del rectángulo cuyos lados son m y $b-a$.

- Teorema: "Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si m y M son, respectivamente, los valores mínimo absoluto y máximo absoluto de f en $[a,b]$ de modo que, $m \leq f(x) \leq M$ para todo $a \leq x \leq b$; entonces, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$" (Ibídem, p.353).

Demostración:

Si f es continua en $[a,b]$, los valores extremos aseguran la existencia del valor mínimo (m) y el valor máximo (M), absoluto.

Sabemos qué;

$$\int_a^b mdx = m(b-a) \text{, y} \tag{11}$$

$$\int_a^b Mdx = M(b-a) \tag{12}$$

Debido a que f es continua en $[a,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$. Entonces, como $f(x) \geq m$ para toda x en $[a,b]$, se tiene que,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx$$

Al sustituir (11), tenemos; $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$ (13)

De manera semejante como $M \geq f(x)$ para toda x en $[a,b]$, se tiene que

$\int_a^b Mdx \geq \int_a^b f(x)dx$, al sustituir en (12), se tiene $M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx$ (14)

Si se combina (13) y (14) se obtiene;

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ejemplo:

Determinar el intervalo de la forma $[a,b]$ que contenga el resultado de $\int_{0,5}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx$; si en f, m=1 para $x=3$ y M=5 para $x=1$.

Solución:

Determinando el intervalo al cual pertenece la integral, tenemos;

$$1(4-0,5)\leq\int_{0,5}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx\leq 5(4-0,5)$$

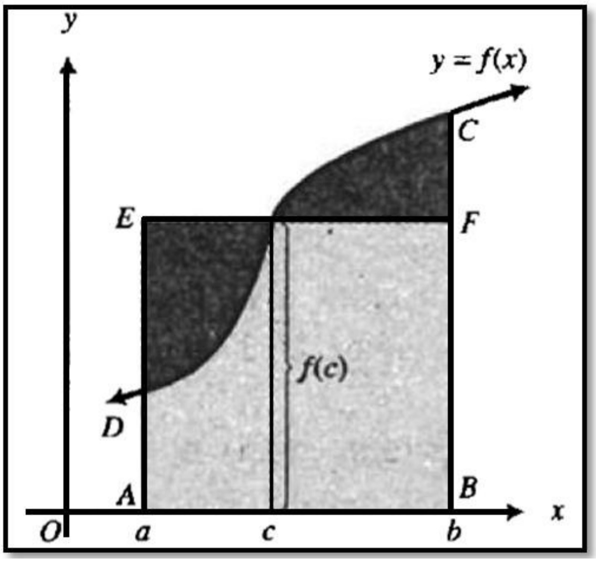
$$3,5\leq\int_{0,5}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx\leq 17,5$$

En consecuencia, el intervalo $[3,5;17,5]$ contiene el valor 10,61 que es el que corresponde a la integral definida señalada.

Considere $f(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ determina el área del recinto delimitada por $y=f(x)$, el eje x y las rectas perpendiculares $x=a$ y $x=b$.

En conclusión, el teorema del VM para integrales señala que el área del rectángulo AEFB cuya base es $(b-a)$ y altura $f(c)$ unidades es igual al área del recinto ADCB; siempre y cuando exista un número c que pertenece a $[a,b]$

Gráfico 50 **Teorema del valor medio-Comparación de áreas**



Fuente. Leithold, L (1998)

- **Teorema:** “Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ entonces existe un número c en $[a,b]$, tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$” (Ibídem, p.356).

Demostración:

En $x = x_m$, se presenta un valor m que es un valor mínimo relativo; es decir, $f(x_m) = m \wedge a \le x_m \le b$.

En $x = x_M$, se presenta un valor M que es un valor máximo relativo; es decir, $f(x_M) = M \wedge a \le x_M \le b$; por lo tanto, $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$.

Además, sabemos que, $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Al dividir entre $(b-a)$ positivo ya que $b > a$, se tiene

$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a)} \le M$, pero $m = f(x_m)$ y $M = f(x_M)$, entonces

$$f(x_m) \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a)} \le f(x_M)$$

De la desigualdad precedente y por el TVM, $\exists c \in [a,b]$ que contiene a los puntos extremos x_m y x_M tal que,

$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$, de donde $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $a \le c \le b$.

En conclusión, “el valor de c en el teorema del valor medio para integrales no es necesariamente único. El teorema no proporciona un método para obtener el valor de c, pero afirma que un valor de c existe, y este hecho se utiliza para demostrar otros teoremas. En algunos casos particulares se puede determinar el valor de c garantizado por el teorema” (Ibídem, p.356).

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2$, determine el valor de c con aproximación al centésimo tal que $\int_1^3 f(x)dx = f(c)(3-1)$. Utilice calculadora de pantalla gráfica.

Solución:

El valor de la integral $\int_1^3 x^2 dx = 8{,}667$, por tanto para obtener el valor de c, tenemos;

$f(c)(2) = 8{,}667$; entonces, $c^2 = 4{,}333 = \pm 2{,}08$.

Como $-2{,}08 \notin [1,3]$ se descarta, considerando la integral $\int_1^3 f(x)dx = f(2{,}08)(3-1)$.

El valor $f(c)$ de acuerdo al gráfico y a lo que establece el TVM para la integral es el valor medio (o valor promedio) de f en $[a,b]$.

Para generalizar, consideramos que $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y que para todo w_i cualquier número del i-ésimo subintervalo, la media aritmética es $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)}{n}$.

Al sustituir $n = \dfrac{b-a}{\Delta x}$, obtenemos; $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x}{b-a}$.

Tomando el límite y si el límite existe, cuando, $n \to \infty \wedge \Delta x \to 0$, se tiene:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x}{b-a} = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. (Valor Promedio (VP) para una integral).

Ejemplo:

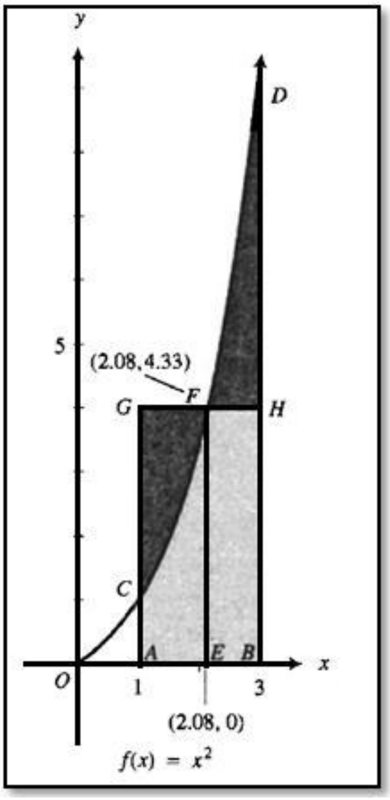
Si $f(x) = x^2, \forall x \in [1,3]$, determine el VP de f e interprete geométricamente el resultado.

Solución:

Sabemos que $\int_1^3 x^2 dx = 8{,}667$, entonces el valor promedio de f en $[1,3]$, es;

$VP = \dfrac{8{,}667}{3-1} = 4{,}33$.

Gráfico 51. **Teorema del valor medio en** $f(x) = x^2$



Fuente. Maurtua, J. (2018)

Del ejemplo anterior, se obtuvo que $f(2,08) = 4,33$. En consecuencia, el valor promedio de f se da cuando $x = 2{,}08$.

Como el área del rectángulo AGHB, con altura de 4,33 unidades y ancho de 2 unidades, es igual al área del recinto ACDB; el área del recinto CGF es igual al área del recinto FDH.

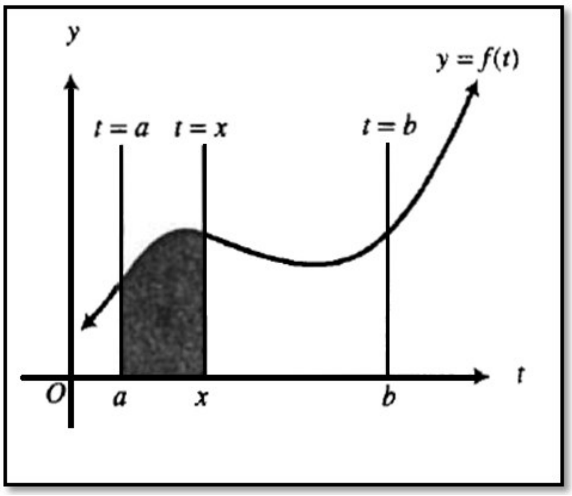
2.3.7.3. Teoremas fundamentales del cálculo. "Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ depende solo de f y de a y b y no del símbolo x utilizado como variable independiente.

Por ejemplo se puede utilizar otro símbolo en lugar de x, como se puede apreciar en las siguientes integrales: $\int_0^3 t^2 dt = 9$, $\int_0^3 u^2 du = 9$ ó $\int_0^3 r^2 dr = 9$" (Ibídem, p.360).

Si $x \in [a,b]$ y siendo f continua en $[a,b]$, entonces f es continua en $[a, x]$. Por lo tanto, $\int_a^x f(t)dt$ existe, y es un número que depende de x. Entonces, $\int_a^x f(t)dt$ define una función F (llamada función primitiva), cuyo dominio pertenece a $[a,b]$ y está dado por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. (15)

Respecto a la notación, "si los límites de una integral definida son variables, entonces se utilizan símbolos diferentes para dichos límites y la variable independiente del integrando. En consecuencia, en (15), como x es el límite superior, se emplea la letra t como variable independiente del integrando. Si, en (15), $f(t) \geq 0$ para todos los valores de t en $[a,b]$, entonces el valor de función $F(x)$ puede interpretarse geométricamente como la medida del área de la región R limitada por la curva cuya ecuación es $y = f(t)$, el eje t y las rectas $t = a$ y $t = x$"(Leithold,1998, p. 361).

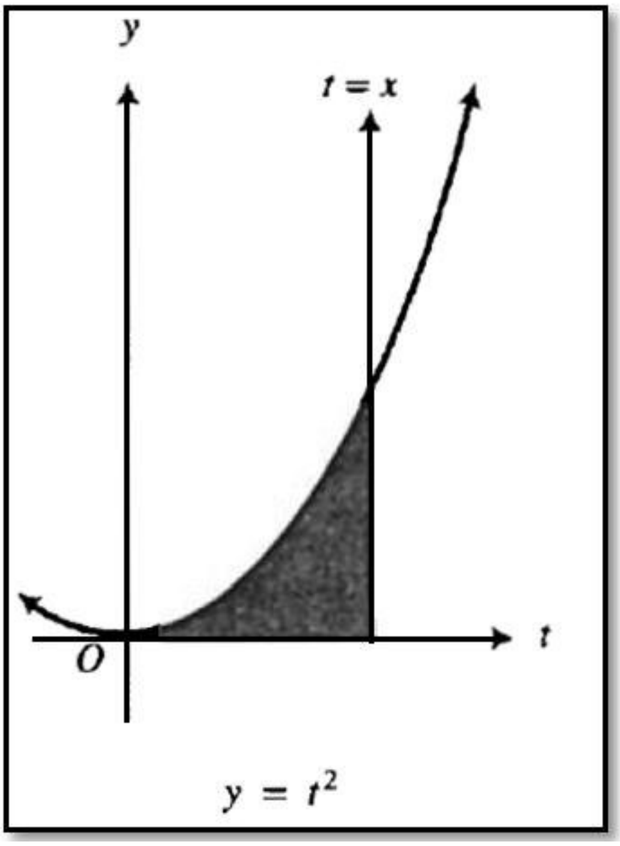
Gráfico 52. **Región delimitada por $y = f(t)$, el eje t, $t = a$ y $t = x$**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

Ejemplo:

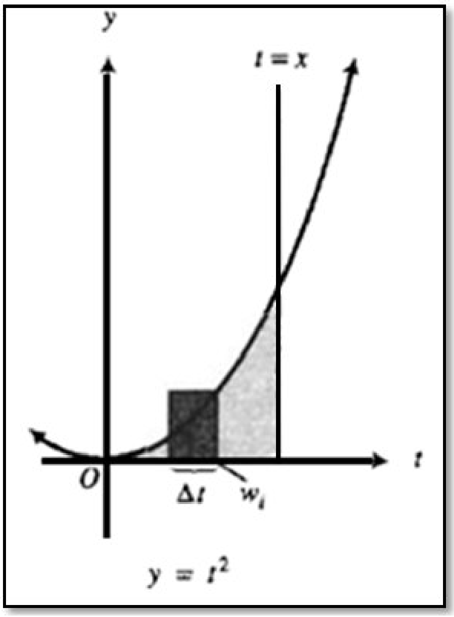
Sea $F(t)=\int_{a}^{x} t^{2}dt$.



Sabemos que la medida del área del recinto es $F(x)$, entonces esta se puede determinar aplicando Riemann.

"Para ello, se toma una partición regular del intervalo $[0,x]$ y se elige w_i como el extremo derecho del i-ésimo subintervalo" (Leithold, 1998, 124). Entonces, se utilizarán rectángulos circunscritos, tal como se presenta en la gráfica (53).

Gráfico 53. **Partición de la región formada debajo de la curva**



Fuente. Leithold, L (1998)

$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta t$, como $f(t)=t^2$ y $w_i=i\Delta t$,

$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(i^2(\Delta t)^2)\Delta t$

$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i^2(\Delta t)^3$, sustituyendo Δt por $\frac{x}{n}$:

$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i^2(\frac{x}{n})^3$, obtenemos $F(x)=\lim_{n\to\infty}(\frac{x}{n})^3\sum_{i=1}^{n} i^2$

$$F(x)=x^3\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^3(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$F(x)=x^3\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$F(x)=x^3\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$, de donde; $F(x)=\frac{x^3}{3}$

Como $F(x)=\frac{x^3}{3}$, $F'(x)=x^2$, esto es, $\frac{d}{dx}\int_a^x t^2dt=x^2$.

De lo anterior se ha demostrado en este caso particular que, cuando $f(t)=t^2$ y $a=0$, obtenemos que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

Esta expresión representa algebraicamente el primer teorema fundamental del cálculo.

2.3.7.4. Primer teorema fundamental del cálculo. "Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea x cualquier número de $[a,b]$. Si F es la función definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces, $F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$."(Ibídem, p.362).

2.3.7.5. Segundo teorema fundamental del cálculo. "Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea $F(x)$ una función primitiva cualquiera de f; es decir $F'(x)=f(x)$; entonces; $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$" (Ibídem, p.364).

Demostración.

"Si f es continua en $[a,b]$ y por el primer teorema fundamental del cálculo la integral definida $\int_a^x f(t)dt$ con límite superior variable x, define una función F cuya derivada en $[a,b]$ es f. Si $F'(x)=f(x)$, se deduce que; $F(x)=\int_a^x f(t)dt+k$.

Donde k es constante. Considerando $x=a$ y $x=b$, se tiene que;

$F(b)=\int_a^b f(t)dt+k$ y $F(a)=\int_a^a f(t)dt+k$, restando ambas expresiones tenemos;

$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt$; pero $\int_a^a f(t)dt=0$, entonces,

$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$; que es equivalente a $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$" (Ibídem, p.364).

Es lo se deseaba demostrar.

Ejemplo:

Evalúe $\int_{1}^{2} x^4 dx$.

Solución:

$$\int_{1}^{2} x^4 dx = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}.$$

Ejemplo:

Evalúe $\int_{0}^{2} (x^2 + x)dx$.

Solución:

$$\int_{0}^{2} (x^2 + x)dx = \int_{0}^{2} x^2 dx + \int_{0}^{2} + xdx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}$$

$$\int_{0}^{2} (x^2 + x)dx = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2}\right)\right) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

2.3.7.6. Área de una región plana cuando $f(x) < 0$. En el apartado (2.3.7.6) el área de un recinto plano se definía como el límite cuando $n \to \infty$ de los términos de la suma de Riemann , y que dicho límite es equivalente a una integral definida. De acuerdo a las técnicas para calcular integrales definidas, en esta sección se desarrollarán problemas sobre áreas de regiones debajo de una curva o entre dos curvas.

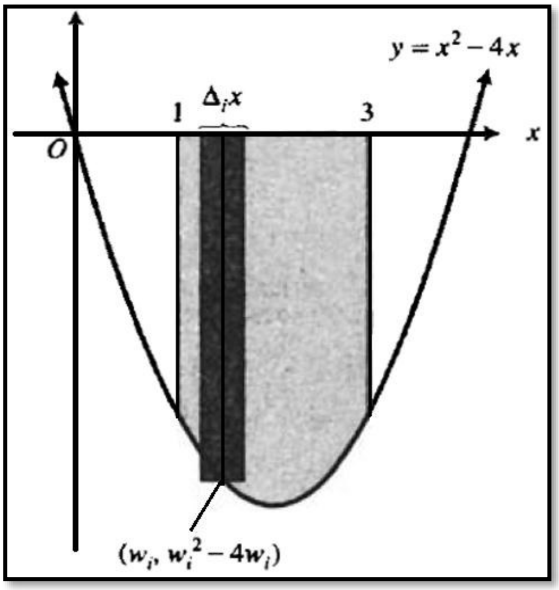
Ejemplos:

1. Calcule el área del recinto delimitado por $y = x^2 - 4x$, el eje de las abscisas y las rectas perpendiculares $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

Representado gráficamente la función.

Gráfico 54. **Región comprendida entre** $y = 0$ **y** $y = x^2 - 4x$



Fuente. Maurtua, J. (2018)

En el gráfico, se presenta un elemento rectangular en la región plana y una partición en $[1,3]$ cuya base del i-ésimo rectángulo es $\Delta_i x$. Como $f(x) < 0; \forall x \in [a,b]$, entonces la altura es $f(x) = -(w_i^2 - 4w_i) = 4w_i - w_i^2$. Por lo tanto, para n rectángulos la expresión es $\sum_{i=1}^{n}(4w_i - w_i^2)\Delta_i x$.

Siendo A la medida del área en (u^2) de la región y $|\Delta| \to 0$, entonces;

$$A = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n}(4w_i - w_i^2)\Delta_i x$$

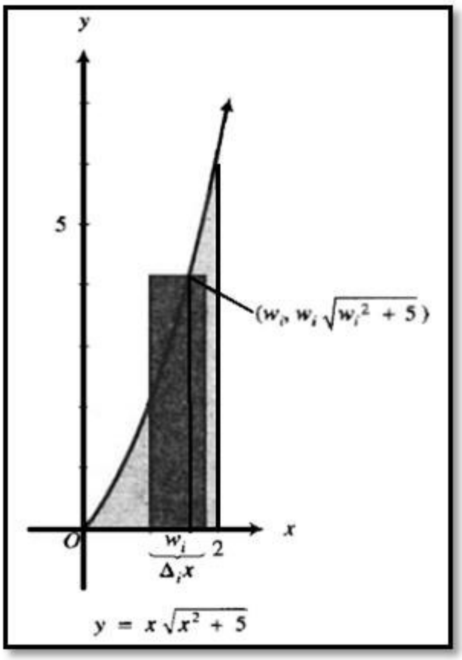
$$A = \int_1^3 (4x - x^2)dx$$

$A = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^3$; entonces $A = \frac{22}{3}u^2$.

2. Calcule el área del recinto delimitada en el primer cuadrante, la función $y = x\sqrt{x^2+5}$ y la recta $x = 2$.

Solución: Representado gráficamente la función.

Gráfico 55. **Región debajo de la curva** $y = x\sqrt{x^2+5}$



Fuente. Leithold, L (1998)

En el gráfico, se presenta un elemento rectangular en la región plana y una partición en $[0,2]$ cuya base del i-ésimo rectángulo es $\Delta_i x$ y altura $f(w_i) = w_i\sqrt{w_i^2+5}$, donde $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Entonces, el área del rectángulo es $w_i\sqrt{w_i^2+5}\Delta_i x$; y la suma de las áreas de los n rectángulos quedará expresada como $\sum_{i=1}^{n} w_i\sqrt{w_i^2+5}\Delta_i x$; y el área será:

$$A = \sum_{i=1}^{n} w_i\sqrt{w_i^2+5}\Delta_i x$$

$$A = \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}dx$$

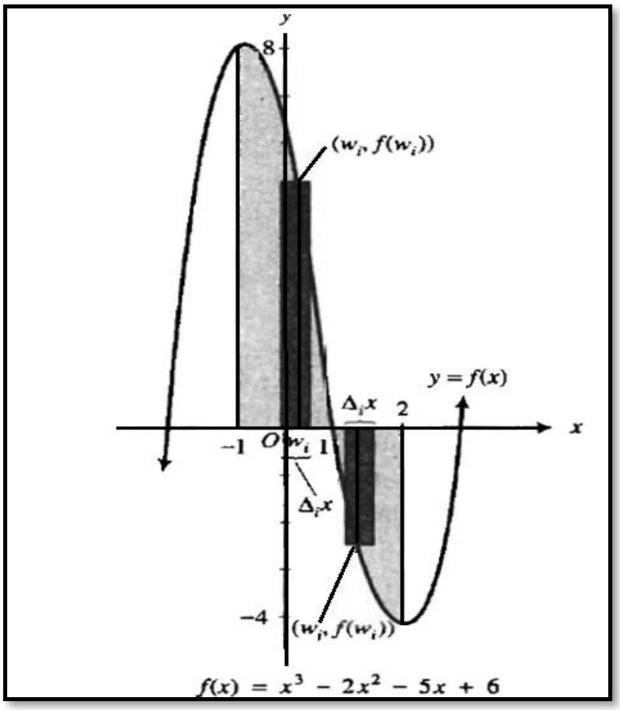
$$A = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{x^2+5}(2x)dx$$

$$A = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2$$

$A = \frac{1}{3}.(9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$; $A = \frac{1}{3}.(27 - 5\sqrt{5})$, de donde, $A = 5{,}27\ u^2$.

3. Determine el área del recinto delimitado por $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, el eje de las abscisas y las rectas perpendiculares $x = -1$ y $x = 2$.
Solución:
Representado gráficamente la función.

Gráfico 56. **Región comprendida entre** $y = 0$ **y** $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$



Fuente. Leithold, L (1998)

En la función dada, $f(x) \geq 0$ cuando $x \in [-1, 1]$ y $f(x) \leq 0$ cuando $x \in [1, 2]$; en ese sentido conveniente analizar la regiones en cada uno de los intervalos señalados.
Sea A_1 el área de la región cuando $x \in [-1, 1]$, y sea A_2 el área de la región cuando $x \in [1, 2]$; entonces;

$$A_1 = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i) \Delta_i x$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} fxdx$$

$$A_2 = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (-f(w_i) \Delta_i x$$

$$A_2 = \int_{1}^{2} fxdx$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx \qquad \Big| \qquad A_2 = \int_{1}^{2} -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx$$

Si A representa el área total; tenemos que, $A = A_1 + A_2$

$$A = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx$$

$$A = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{1}^{2}$$

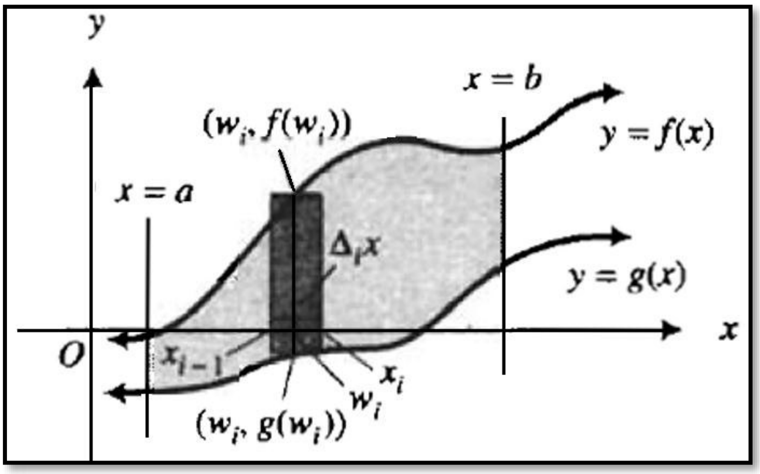
$$A = [(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6) - (\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 6)] - [(4 - \frac{16}{3} - 10 + 12) - (\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6)]$$

$A = \frac{32}{3} - (-\frac{29}{12})$, de donde $A = \frac{157}{12}\, u^2$

2.3.7.7. Área de una región plana comprendido entre dos funciones.

Siendo f y g son funciones continuas en $[a,b]$, además $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$; el recinto delimitado por $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas perpendiculares $x = a$ y $x = b$; se muestra en la siguiente gráfica.

Gráfico 57. **Región comprendida entre dos curvas**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

Para determinar el área de la región formada realizamos una partición en $[a,b]$, donde $\Delta_i x$ es el ancho de la base del i-ésimo rectángulo; además si tomamos un número w_1 en cada subintervalo, cada rectángulo tendrá una altura equivalente a $[f(w_1) - g(w_1)]$ unidades y un ancho $\Delta_i x$ unidades; entonces la suma todas las áreas de las n regiones rectangulares se determinará por la suma de Riemann: $\sum_{i=1}^{n}[(f(w_i) - g(w_i)]\Delta_i x$.

De esta expresión mientras $|\Delta| \to 0$, mejor será la aproximación del área del recinto comprendido entre las dos funciones. Entonces para calcular A tenemos:

$$A = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n}[f(w_i) - g(w_i)]\Delta_i x.$$

Finalmente como f y g son continuas en $[a,b]$, ($f - g$) también lo es; y si el límite existe, entonces A es igual a la integral definida,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx. \qquad (16)$$

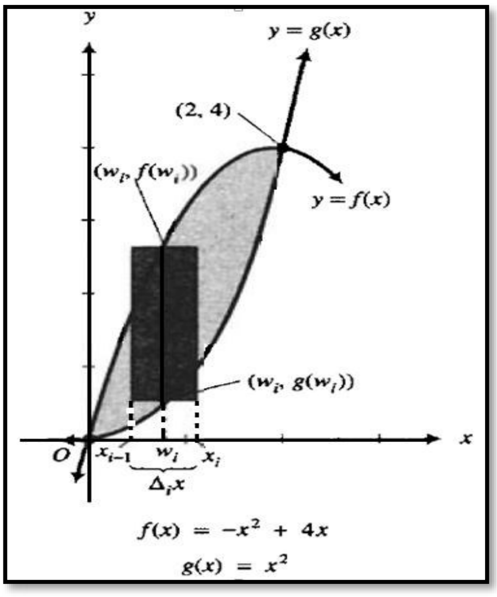
Ejemplo:

Calcule el área del recinto delimitad por $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$

Solución:

Igualamos las funciones y hallamos los puntos de intersección: (0,0) y (2,4).

Gráfico 58. **Región comprendida entre las curvas** $y = x^2$ **y** $y = -x^2 + 4x$



Fuente. Leithold, L (1998)

Si A es el área del recinto, entonces, $A = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\Delta_i x$, que es equivalente a $A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx$; entonces,

$$A = \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - x^2]dx$$

$$A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = A = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \Big|_0^2 = A = -\frac{16}{3} + 8 - 0 \text{; de dónde } A = \frac{8}{3}u^2$$

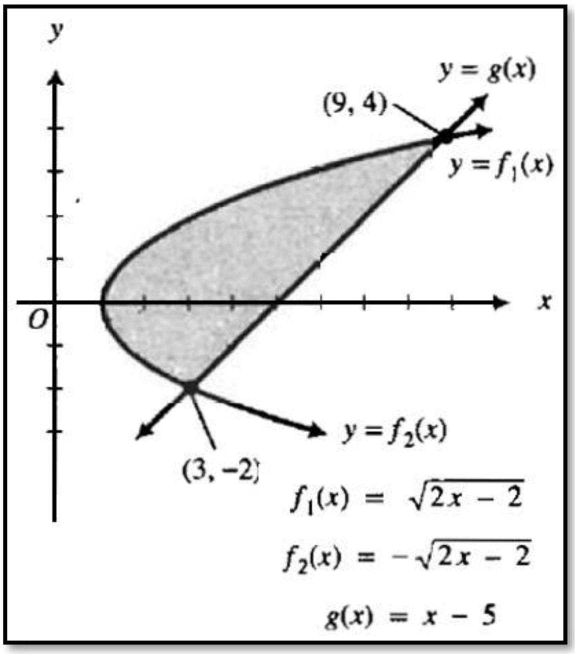
Ejemplo:

Calcule el área del recinto delimitado por $y^2 = 2x - 2$ y la recta $y = x - 5$.

Solución:

Igualamos las funciones para hallar los puntos de intersección, en este caso obtenemos los puntos (3,-2) y (9,4).

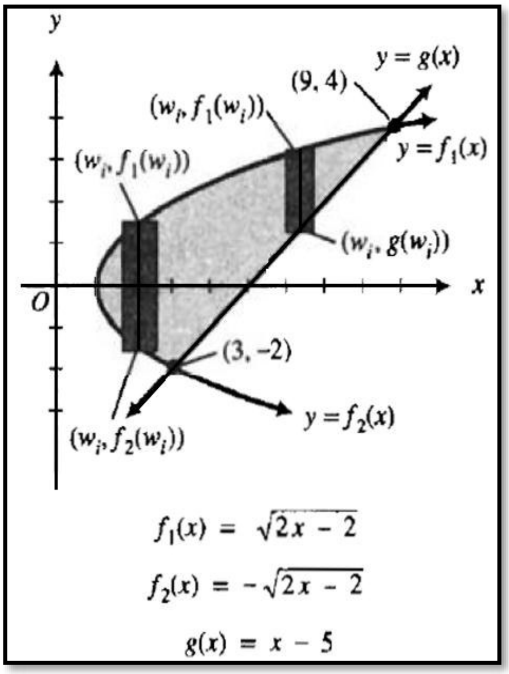
Gráfico 59. **Región comprendida entre las curvas $y^2 = 2x - 2$ y la recta $y = x - 5$**



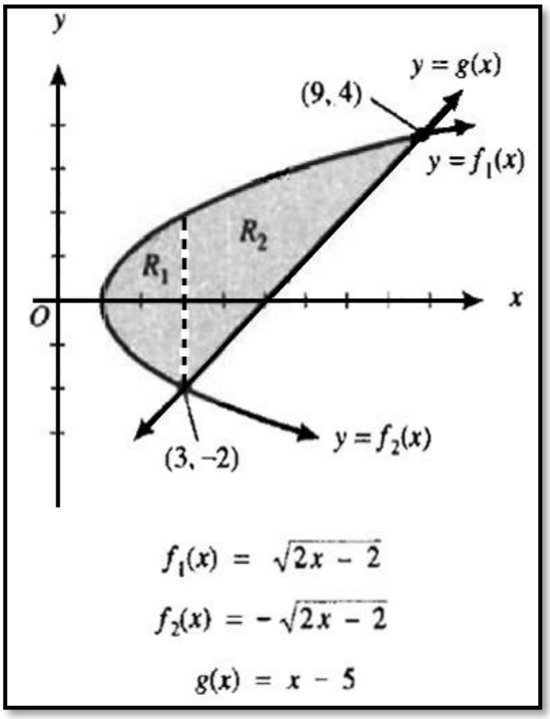
Fuente. Leithold, L (1998)

Sabemos que la función $y^2 = 2x - 2$ es equivalente a $y = \sqrt{2x - 2}$ y $y = -\sqrt{2x - 2}$, en ese sentido la primera proporciona el área de la región que está por encima del eje de las abscisas mientras que la segunda la parte inferior. Si $f_1(x) = \sqrt{2x-2}$ y $f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$.

Si se consideramos que $g(x) = x - 5$, el gráfico quedaría de la siguiente manera;



Utilizando el criterio para determinar la base y la altura del i-ésimo elemento rectangular, obtenemos la siguiente gráfica:



Si A_1 es el área del recinto R1, entonces;

$$A_1 = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f_1(w_i) - f_2(w_i)]\Delta_i x,$$

tenemos.

$$A_1 = \int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

$$A_1 = \int_1^3 [\sqrt{2x-2} + \sqrt{2x-2}]dx$$

$$A_1 = 2\int_1^3 \sqrt{2x-2}dx$$

$$A_1 = \frac{2}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3$$

$$A_1 = \frac{16}{3}u^2$$

Si A_2 es el área del recinto R2, entonces;

$$A_2 = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f_1(w_i) - f_2(w_i)]\Delta_i x,$$

tenemos.

$$A_2 = \int_3^9 [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

$$A_2 = \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)]dx$$

$$A_2 = \frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^2 + 5x\Big|_3^9$$

$$A_2 = [\frac{64}{3} - \frac{81}{2} + 45] - [\frac{8}{3} - \frac{9}{2} + 15]$$

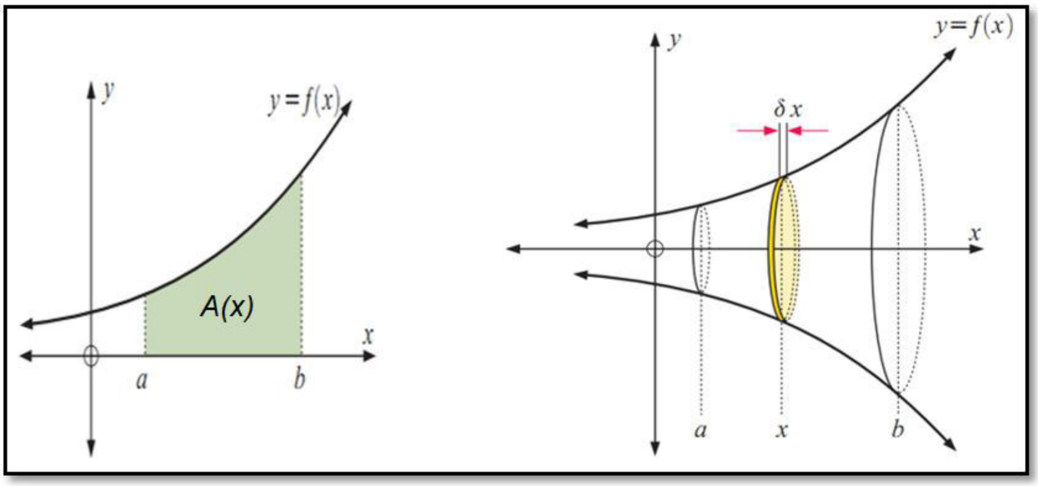
$$A_2 = \frac{38}{3}u^2$$

Por lo tanto el área total es $A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3}u^2 + \frac{38}{3}u^2 = 18u^2$.

2.3.7.8. Volumen de un sólidos de revolución mediante los métodos del rebanado o del disco. De un cilindro recto cuya área básica es A y altura h, el volumen (V) es $V = Ah$.

A partir de esta relación de fórmula calcularemos de manera general el volumen de cualquier sólido de revolución que gira de 360° alrededor de unos de los ejes del plano cartesiano, tal como se muestra a continuación.

Gráfico 60. **Sólido de revolución al girar $f(x)$ alrededor del eje x**



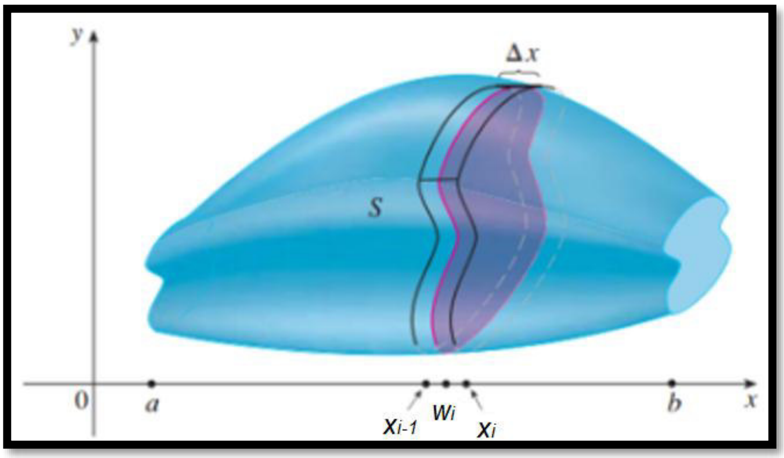
Fuente. Stewart, J. (2008)

De lo mencionado, sea $A(x)$ el área de la región en unidades cuadradas, continua en $[a,b]$ y cuya sección plana es perpendicular al eje x.

Al elegir $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ un número en cada subintervalo y construir cilindros perpendiculares con altura $\Delta_i x$ u y área de la sección plana de $A(w_i)$ u², tenemos que;

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\Delta_i x$$, la cual es una suma de Riemann. (17)

Gráfico 61. **Análisis general de una rebanada de un sólido de revolución**



Fuente. Adaptado de Stewart, J. (2008)

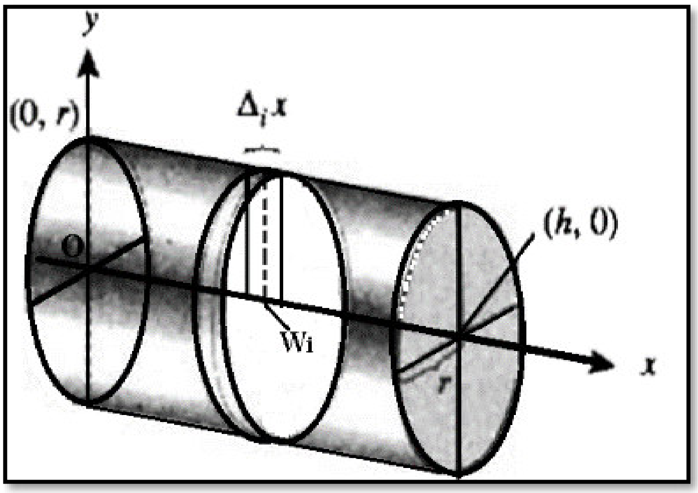
Esta suma es una aproximación del volumen del sólido de revolución en (u³). En ese sentido, cuando $|\Delta| \to 0$, la aproximación estará más cerca al volumen. En consecuencia, el volumen V se define como el límite de los términos de la suma de Riemann cuando $|\Delta| \to 0$. En este caso el límite existe dado que A es continua en $[a,b]$.

- Definición del volumen de un sólido de revolución

"Sea S un sólido tal que S está entre dos planos perpendiculares al eje x en a y b. Si la medida del área de la sección plana S, perpendicular al eje x, está dada por $A(x)$, donde A es continua en $[a,b]$, entonces la medida del volumen de S está dado por $V = \lim\limits_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\Delta_i x$ que es la integral definida

$V = \int_a^b A(x)dx$" (Ibidem, p.382). (18)

Gráfico 62. **Sólido de revolución en el plano cartesiano**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

Al tomar un elemento del volumen (cilindro recto), tenemos que el área de la sección transversal es $A(w_i)$ u² y cuyo espesor de $\Delta_i x$. Por lo tanto,

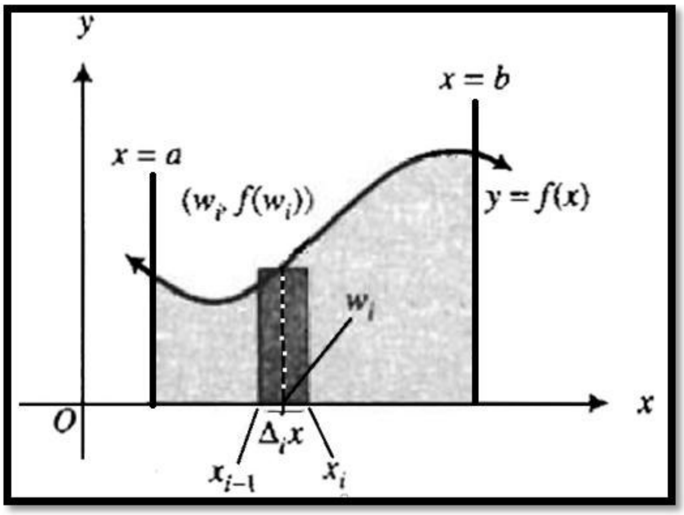
$$V = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\Delta_i x$$

$$V = \int_0^h A(x)dx$$

$$V = \int_0^h \pi r^2 dx$$; de dónde, $V = \pi r^2 x \Big|_0^h$; entonces, $V = \pi r^2 h$.

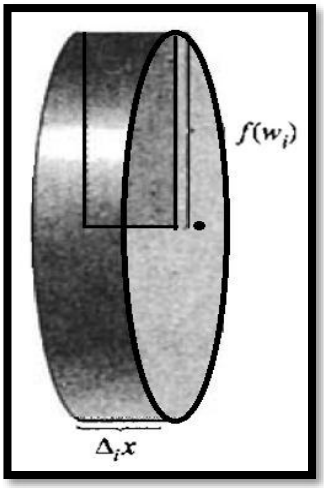
En este caso, si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, entonces la región R del i-ésimo rectángulo delimitada por $y = f(x)$, las rectas perpendiculares $x = a$ y $x = b$, y $y = 0$, tal como se muestra en el siguiente gráfico;

Gráfico 63. **Partición del área debajo de una curva**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

Del gráfico, si hacemos girar 360° alrededor del eje x el i-ésimo rectángulo obtenemos el elemento de volumen (disco), cuyos elementos se muestran en la figura adjunta;



Si $\Delta_i V$ cúbicas es el volumen, entonces, $\Delta_i V = \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$. Al existir n rectángulos, se obtendrán la misma cantidad de discos, por lo tanto, el volumen total (de los n discos) se obtendrá a través de:

$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$. (suma de Riemann)

Entonces se deduce que V es el límite cuando $|\Delta| \to 0$. Además el límite existe porque f^2 es continua en $[a,b]$.

- Volumen de un sólido de revolución

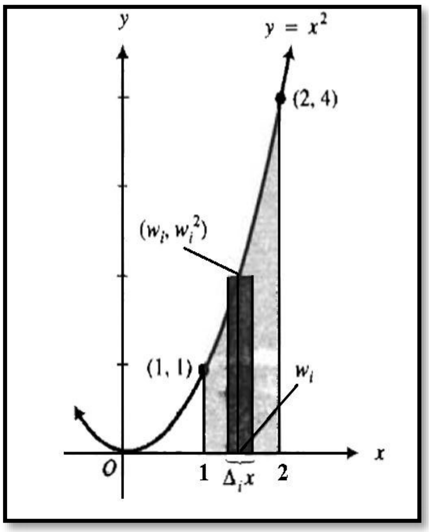
"Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y suponga que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a,b]$. Si S es el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x y la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, y si V unidades cúbicas es el volumen de S, entonces; $V = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$; de donde, $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$" (Leithold, L., 1998, p.382).

Ejemplo:

Si la función $y = x^2$, gira 360° y está delimitado por el eje de las abscisas y las rectas perpendiculares $x = 1$ y $x = 2$; calcule el volumen que se genera.
Solución:

Al graficar identificamos el elemento volumen que es parte del sólido de revolución; entonces:

*Gráfico 64.***Sólido de revolución en el plano cartesiano**



Fuente. Maurtua, J. (2018)

La medida del volumen (en u^3) del disco está dado por;

$$V = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi [x^2]^2 \Delta_i x$$

$$V = \pi \int_1^2 x^4 dx$$

$$V = \pi (\frac{x^5}{5}) \Big|_1^2$$

$$V = \frac{31\pi}{5} u^3$$

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

3.1 Metodología de la investigación

3.1.1. Tipo de investigación

3.1.1.1. Tipificación de la investigación. La investigación será aplicada por el tipo de preguntas que están dirigidas hacia un campo temático específico. De causa efecto experimental, porque se van a contrastar la hipótesis general y las específicas. Cuantitativo y bivariable por la forma cantidad y de medir las variables de trabajo. Será de campo porque los resultados se van obteniendo a través de las prácticas pedagógicas insitu en el aula. Primaria por que los datos se obtendrán directamente de la interacción con los estudiantes en las aulas de clase. Y longitudinal o diacrónica por la temporalidad de la investigación que no solo estará sujeta a la implementación de la estrategia metodología que propone la presente investigación, sino también de las exploraciones previas con los estudiantes.

3.1.2. Diseño de la investigación

Siguiendo la propuesta de Maurtua (2015), para la presente investigación se empleó el diseño cuasi experimental "con pre prueba-post prueba y con grupo de control; asignando aleatoriamente a los sujetos a los dos grupos: experimental y de control. A ambos grupos se les administró la pre prueba simultáneamente. Luego, el grupo experimental recibió el tratamiento, es decir; se le aplicó la estrategia de enseñanza, y el grupo de control no lo recibió, pero trabajó con los mismos problemas que utilizó el grupo experimental. Finalmente, se les administró a ambos grupos –también simultáneamente la una post prueba idéntica a la que se les administró a los dos grupos antes del experimento" (p.128).

El diseño de investigación tiene como propósito corroborar si existen diferencias significativas tanto en el grupo de control y experimental, debido a la aplicación de las estrategias metodológicas basadas en la Acción, el

Proceso, Objeto y Esquema (variable independiente) que se aplican en la red de los COAR.

Entonces, se tiene la investigación del tipo:

Grupo Experimental:	O_{11}	X	O_{12}
Grupo de Control:	O_{21}		O_{22}

Dónde:

"X : es el grupo experimental

O_{11} y O_{12}: son las observaciones y mediciones realizadas antes (pre prueba) y después (post prueba) en el grupo experimental.

O_{21} y O_{22}: son las observaciones y mediciones realizadas antes (pre prueba) y después (post prueba) en el grupo de control"(Maurtua, 2015, p.129).

3.1.3. Operacionalización de variables

La variable independiente y dependiente se van a operacionalizar siguiendo una estructura específica en cada caso, tal como se muestran en las tablas (3) y (4):

Tabla 3. **Operacionalización de la variable independiente: estrategias metodológicas acción-proceso-objeto-esquema**

Variable independiente	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores	Sesiones	Cronograma	Instrumentos
Estrategias metodológicas Acción, Proceso, Objeto y Esquema	Según Asiala (1996) el desarrollo de la comprensión comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas.	Operacionalmente las dimensiones de la estrategias metodológica Acción-Proceso-Objeto-Esquema tiene cuatro dimensiones y dieciséis indicadores:	Interiorización	- Analiza la transferencia de los conocimientos previos relacionados a sumatorias y funciones para aplicarlos a la comprensión de la Integral Definida.	1	Del 25 al 30 de junio	Programación Bianual.
				- Representa de forma gráfica y analítica la partición de un intervalo cerrado.	2		
				- Interpreta y analiza el área superior e inferior de una región formada debajo de una curva como aproximación.	3		
			Coordinación	- Usa estrategias de identificación, de simulación y de procesos para la comprensión del área de una región formada debajo de una curva como suma límite.	4	Del 02 al 07 de julio	Unidades de aprendizaje
				- Utiliza diferentes registros de representación para la comprensión de la integral definida.	5		
				- Reconoce las propiedades y características fundamentales de la integral definida.	6		
			Encapsulación y des-encapsulación	- Determina el teorema fundamental cálculo a partir de las demostraciones del valor medio de la integral.	7	Del 09 al 14 de julio	Sesiones de clase
				- Analizar la forma y el método que los estudiantes utilizan en la resolución de problemas y ejercicios sobre el cálculo de áreas y volúmenes.	8		
				- Determinar qué tipo de argumentos en cuanto a las formas de representación (gráfico, algebraico, numérico) utilizan los estudiantes para justificar la propiedad aditiva de la Integral Definida.	9		
			Tematización	- Analizar la relación que establecen los estudiantes entre la imagen y la definición del concepto a partir de la condición suficiente que la continuidad implica integrabilidad.	10	Del 16 al 21 de julio	
				- Analiza la comprensión del concepto de la integral definida, para hallar el área formada debajo de una curva y el volumen de un sólido de revolución.	11		
				- Argumenta el nivel de la relación entre la comprensión del concepto de la Integral Definida y la imagen este en los estudiantes.	12		

Fuente. Maurtua, J. (2018)

Tabla 4. **Operacionalización de la variable dependiente: comprensión de la integral definida**

Variable dependiente	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores	Items	Escala /índice	Instrumento
Comprensión de la integral definida	Se define como el resultado o producto de la práctica pedagógica en el aula; que consiste en la comprensión del concepto de la integral definida a través de estrategias basadas en la acción, proceso, objeto y esquema; así como de los diferentes registros de representación.	Operacionalmente las dimensiones para el nivel de logro alcanzado en la construcción del concepto de la integral definida son tres, con 14 indicadores distribuidas en el test a través de 14 ítem.	Conocimiento y comprensión	- Aplica estrategias y usa los criterios apropiados para calcular áreas en el plano cartesiano.	1	INICIO: [0-10]	
				- Muestra entendimiento para el tratamiento del objeto matemático relacionado a una progresión geométrica infinitamente decreciente.	2		
				- Usa estrategias para determinar la aproximación del área formada debajo de la curva a través de particiones conocidas en un intervalo.	3		
				- Usa estrategias para determinar la aproximación del área formada debajo de la curva a través de la partición de un intervalo.	4	PROCESO: [11-13]	PRE PRUEBA
				- Usa estrategias de identificación de procesos y de comparación para hallar el área a través de la geometría analítica y la aplicación de la Integral Definida.	5		
			Comunica y representa	- Evalúa el valor de verdad de las proposiciones referidas al teorema fundamental del cálculo y la integral de una función discontinua.	6		
				- Utiliza argumento razonado para establecer la comprensión del concepto de la integral definida a partir de la suma de Riemann.	7	LOGRO PREVISTO: [14-17]	
				- Analiza y establece diferencias geométricas de la suma inferior y superior del área como aproximación formada debajo de una curva.	8		POST PRUEBA
				- Obtiene conclusiones y elabora argumentos sobre la aproximación de áreas formadas debajo de una curva a partir de condiciones iniciales.	9		
				- Determina el área de región formada debajo de una curva a través de la suma de Riemann.	10		
			Resolución de problemas	- Usa estrategias para calcular la integral definida y su aplicación para hallar el volumen de un sólido de revolución.	11	LOGRO DESTACADO: [18-20]	
				- Elabora estrategias relacionadas al uso de representación gráfica del área debajo de la curva, para calcular y plantear conjeturas sobre las propiedades de la integral definida.	12		
				- Elabora estrategias para calcular y plantear conjeturas sobre las propiedades de la Integral Definida.	13		
				- Utiliza representación algebraica y gráfica para resolver una situación matemática que involucra a la derivada y la integral definida.	14		

Fuente. Maurtua, J. (2018)

3.1.4. Unidad de análisis

La población objetivo en la investigación, estuvo integrada por 197 alumnos del 5to grado de secundaria de los COAR que tienen las características siguientes:

1) Son de clase socioeconómica perteneciente a la pequeña burguesía, con edad promedio que oscila entre los 15 y 18 años. 96 estudiantes son del sexo femenino y 101 del sexo masculino, según informes recabados de las fichas de matrículas de cada estudiante.

2) Pertenecen a las regiones de La Libertad, Piura y Tacna.

3) Tienen índices académicos medios, según los resultados del Pre Test y actas de cada una de las Instituciones Educativas de procedencia.

4) No han desarrollado cursos o talleres de matemática, mediante la aplicación de estrategias metodológica que permitan comprender el concepto de la integral definida basada en Acción, Proceso, Objeto y Esquema, como parte del plan de estudios de matemática en el 5to grado de secundaria de los COAR.

5) Están habituados a resolver situaciones problemáticas utilizando solamente un tipo de representación (simbólica: algoritmos, fórmulas o reglas establecidas), dejando de lado las representaciones verbales, gráficas; conforme se ha corroborado a través de la aplicación del Pre Test en la fase diagnóstica.

3.1.5. Población de estudio

La población de estudio en la presente investigación, son los estudiantes del 5to grado de secundaria de los COAR que forman parte de la investigación, matriculados en el año lectivo 2018, siendo un total de 277 estudiantes.

3.1.6. Tamaño de muestra

Se trabajará con una muestra no probabilística; a criterio del investigador, se trabajará con 197 estudiantes de las diversas secciones de los COAR La Libertad, Piura y Tacna, elegidas aleatoriamente.

La aplicación de la estrategia será en las secciones que conforman los grupos Experimental, mientras que a las demás secciones que es el grupo de Control no se le aplicará la estrategia.

3.1.7. Selección de muestra

En la aplicación de las pruebas Pre-Test y Post Test, se tendrá en cuenta a todos los alumnos (197) que estudian en sus respectivas secciones (Experimental y Control), para que no alteren la medición de la variable de estudio.

3.1.8. Instrumentos para la recolección de datos

3.1.8.1. Objeto medido. La población de estudio estuvo conformada por 197 estudiantes del 5to Grado de secundaria del COAR, de los cuales 96 son de sexo femenino y 101 del sexo masculino; que tienen una edad promedio entre los 15 y 18 años de edad. El grueso de los estudiantes pertenecen a sus respectivas regiones; a quienes se les suministró la prueba luego de la aplicación de la estrategia propuesta en la presente investigación.

3.1.8.2. Contenido medido. Se midió la variable dependiente "Comprensión de la integral definida", que incluye tres dimensiones (Conocimiento y comprensión, comunica y representa, y resolución de problemas) y 14 indicadores de evaluación.

3.1.8.3. Estructura de la pre y post prueba de matemática. La prueba elaborada a partir de una tabla de especificaciones en las que se contempla las competencias, capacidades y criterios e indicadores de evaluación, se aplicó a todo el colectivo, conteniendo 14 ítems sobre los conocimientos previos y los correspondientes a la integral definida. El contenido temático de la prueba es:

- Áreas en el plano cartesiano.
- Progresión geométrica infinitamente decreciente.
- Partición de un intervalo cerrado y aproximación de áreas debajo de la curva.
- Suma de Riemann.
- Integral definida-Propiedades.

- Aplicación de la integral definida: áreas debajo de una curva y volumen de un sólido de revolución.

El desarrollo de la investigación se planificó identificando al grupo experimental y al grupo de control; así como, la aplicación de la prueba de entrada, la ejecución de las sesiones de clases y la aplicación de la prueba de salida.

La siguiente tabla nos muestra la cronología de la implementación de la estrategia propuesta en la presente investigación:

Tabla 5. **Cronograma de implementación de la estrategia metodológica**

Grupo	N° de horas Semanal	Nº semana	Total de horas	Turno
Experimental	06	4	24	Mañana/tarde
Control	06	4	24	Mañana/tarde

Fuente. Maurtua, J. (2018)

La estrategia metodológica está basa en la descomposición genética del concepto de la integral definida distribuida en 10 temas:

Tabla 6. **Temas desarrollados en implementación de la estrategia metodológica**

Tema 1:	Introducción a la sumatoria.
Tema 2:	Partición de un intervalo.
Tema 3:	Área como aproximación de regiones formadas debajo de una curva.
Tema 4:	La integral como antiderivada.
Tema 5:	Área como aproximación de regiones formadas debajo de una curva, como el límite de una suma.
Tema 6:	La suma de Riemann y la integral definida.
Tema 7:	Teorema del Valor medio.
Tema 8:	Teoremas fundamentales del cálculo.
Tema 9:	Área debajo de una curva.
Tema 10:	Volumen de un sólido de revolución.

Fuente. Maurtua, J. (2018)

Así mismo, la tabla de especificaciones de la pre prueba y post prueba estuvo estructurada de acuerdo a competencias, capacidades e indicadores de evaluación, tal como se muestra a continuación:

Tabla 7. **Tabla de especificaciones de la pre prueba y post prueba**

Criterios	Capacidades	Indicadores	%	Ítems	Puntaje	Instrumento
Conocimiento y comprensión	Elabora y usa modelos algebraicos. Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales. Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	- Aplica estrategias y usa los criterios apropiados para calcular áreas en el plano cartesiano	20%	1	4	Pre Prueba/Post Prueba
		- Muestra entendimiento para el tratamiento del objeto matemático relacionado a una progresión geométrica infinitamente decreciente.	20%	2	3	
		- Usa estrategias para determinar la aproximación del área formada debajo de la curva a través de particiones conocidas en un intervalo.	20%	3	3	
		- Usa estrategias para determinar la aproximación del área formada debajo de la curva a través de la partición de un intervalo.	20%	4	6	
		- Usa estrategias de identificación de procesos y de comparación para hallar el área a través de la geometría analítica y la aplicación de la integral definida.	20%	5	4	
Total			100%	5	20	
Comunicación e interpretación	Elabora y usa modelos algebraicos. Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales. Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	- Evalúa el valor de verdad de las proposiciones referidas al teorema fundamental del cálculo y la integral de una función discontinua.	20%	6	3	Pre Prueba/Post Prueba
		- Utiliza argumento razonado para establecer la comprensión del concepto de la integral definida a partir de la suma de Riemann.	20%	7	2	
		- Analiza y establece diferencias geométricas de la suma inferior y superior del área como aproximación formada debajo de una curva.	20%	8	4	
		- Obtiene conclusiones y elabora argumentos sobre la aproximación de áreas formadas debajo de una curva a partir de condiciones iniciales.	20%	9	3	
		- Determina el área de región formada debajo de una curva a través de la suma de Riemann.	20%	10	8	
Total			100%	5	20	
Resolución de problemas	Elabora y usa modelos algebraicos. Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales. Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	- Usa estrategias para calcular la integral definida y su aplicación para hallar el volumen de un sólido de revolución.	20%	11	3	Pre Prueba/Post Prueba
		- Elabora estrategias para calcular y plantear conjeturas sobre las propiedades de la integral definida a partir de una representación gráfica del área debajo de la curva.	20%	12	3	
		- Elabora estrategias para calcular y plantear conjeturas sobre las propiedades de la integral definida.	20%	13	2	
		- Utiliza representación algebraica y gráfica para resolver una situación matemática que involucra a la derivada y la integral definida.	40%	14	12	
Total			100	4	20	

Fuente. Maurtua, J. (2018)

3.1.9. Técnicas de recolección de datos

Para la recolección de datos se aplicará una Pre y Post Prueba sobre la comprensión de la integral definida en estudiantes de 5to grado de secundaria de los COAR de las regiones La Libertad, Piura y Tacna

La aplicación del Pre Test tiene como objetivos:

1) Corroborar si el grupo de control y el grupo experimental reúnen las condiciones que permitan la validación interna en la investigación, expresados en la construcción del concepto de la integral definida en las dimensiones de conocimiento y comprensión, comunica y representa, y resolución de problemas.

2) Retroalimentar de manera oportuna los campos temáticos relacionados a los conceptos, teoremas, definiciones, propiedades y aplicaciones a situaciones del contexto, que se estudiará a lo largo de los diez temas propuestos.

El Post Test, se aplicará al término de la aplicación de la estrategia metodológica propuesta (trabajo de campo), cuyos ítems fueron construidos de acuerdo a las competencias, capacidades y criterios de evaluación; en correspondencia al desarrollo del campo temático planificado.

Los objetivos del Post Test serán:

1) Identificar el nivel de logro de los aprendizajes del grupo experimental que utilizaron la estrategia metodológica para la comprensión de la integral definida como concepto matemático y del grupo de control que utilizaron metodologías distintas.

2) Comparar el nivel del logro de los aprendizajes de los alumnos que conforman el grupo experimental y el grupo de control, para confirmar o no la hipótesis de trabajo formulados en el capítulo precedente e inferir conclusiones que determinen la viabilidad de la presente investigación.

3) Determinar el nivel de logro de los aprendizajes de los estudiantes, respecto a la comprensión de la integral definida como concepto matemático -a través de las dimensiones señaladas-, como consecuencia de la aplicación de las estrategias metodológicas, y que permita emitir juicios de valor para optimizar

los procesos pedagógicos y los aprendizajes propiamente dicho en la asignatura de Matemática.

4) Comprobar que la aplicación de la integral definida como concepto matemático en los alumnos del 5to grado de secundaria de los colegios referidos.

3.1.10. Validez del instrumento

La validez es un concepto sobre el cuál se van a construir diversos argumentos y evidencias que van a respaldar los resultados en la evaluación. En ese sentido "La validez, en términos generales, se refiere al grado en que un instrumento mide realmente la variable que pretende medir" (Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M., 2014, p.200).

Para recoger información que permita validar los instrumentos de la presente investigación, se ha desarrollado un cuestionario por cada variable de investigación, el mismo que ha sido puesto a consideración a un grupo de expertos en la materia, para la validación correspondiente; la misma que estuvo a cargo de las siguientes personalidades:

- Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
- Dr. Alcocer Isla Sandy Dorian
- Dra. Alata Cusy Yudith Ivonne

Tabla 8. **Resultados del juicio de experto en la validación de los instrumentos de evaluación**

N°	Expertos	Valoración Variable X	Valoración Variable Y
1	Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro	Adecuado	Adecuado
2	Dr. Alcócer Isla Sandy Dorian	Muy adecuado	Muy adecuado
3	Dra. Alata Cusy Yudith Ivonne	Muy adecuado	Muy adecuado
	Total	**Muy adecuado**	**Muy adecuado**

La valoración de los expertos, en relación a la evaluación de los instrumentos para la variable X: fue valorada como muy adecuada (79% a 100%) y para la variable Y: fue valorada como muy adecuada (79% a 100%). El cual confirma la alta aplicabilidad en la muestra.

3.1.11. Confiabilidad del instrumento

"La confiabilidad de un instrumento de medición se refiere al grado en que su aplicación repetida al mismo individuo u objeto produce resultados iguales" (Ídem, p.200).

Para determinar el nivel de confiabilidad del instrumento, se ha utilizado la prueba de Alfa de Cronbach, cuyos resultados se muestra en las siguientes tablas:

Tabla 9. **Resumen del procesamiento de los casos**

Resumen del procesamiento de los casos			
		N	
Casos	Válidos	197	100,0
	Excluidos	0	,0
	Total	197	100,0

Tabla 10. **Confiabilidad del pre y pos test**

Estadísticos de fiabilidad	
Alfa de Cronbach	N° de elementos
,825	2

Los resultados que se describen en las tablas (9 y10) nos permiten concluir que la confiabilidad del instrumento es alta; respecto, a la respuesta dadas por los estudiantes que forman parte de la muestra, debido a que al aplicar el Alfa de Cronbach resultó 0,825 que representa el 82,5%.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

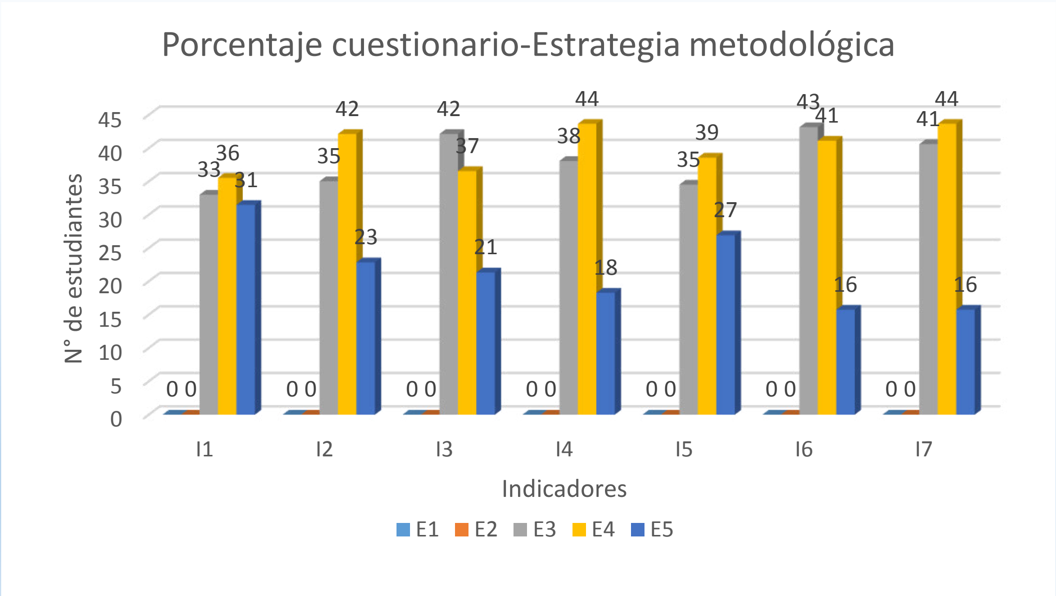
4.1. Análisis, interpretación y discusión de resultados

4.1.1. Análisis, interpretación y discusión de resultados de los datos de la variable independiente: Estrategias metodológicas basada en Acción Proceso Objeto Esquema

Tabla 11. **Frecuencias del Cuestionario sobre la estrategia metodológica acción-proceso-objeto-esquema**

Indicador:		Escala de valoración					Total
		E1 Deficiente	E2 Regular	E3 Buena	E4 Muy Buena	E5 Excelente	
I1	Estrategia metodológica	0	0	65	70	62	197
I2		0	0	69	83	45	197
I3		0	0	83	72	42	197
I4	La comprensión de la integral definida	0	0	75	86	36	197
I5		0	0	68	76	53	197
I6		0	0	85	81	31	197
I7		0	0	80	86	31	197

Gráfico 65. **Valoración de la estrategia metodológica Acción-Proceso-Objeto-Esquema según cuestionario**



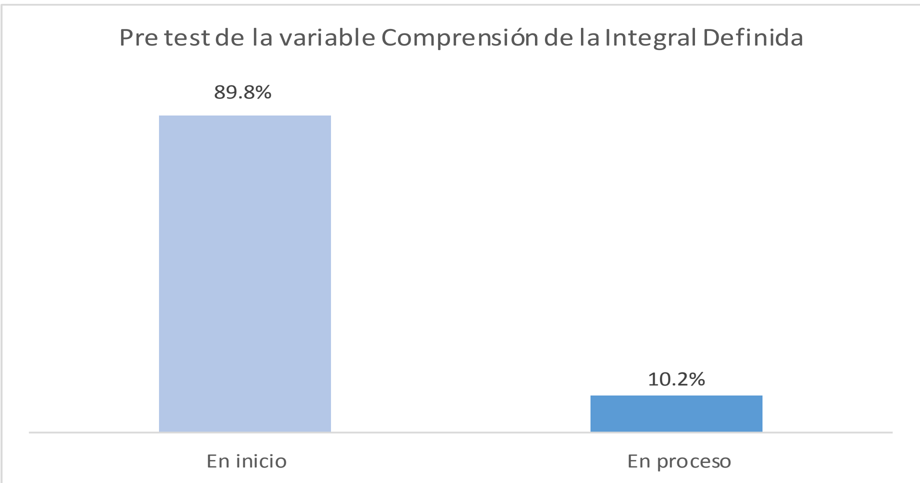
Conforme a los resultados detallados en la tabla (11) y la gráfica (65) se aprecia que en promedio un 38% de estudiantes considera que la estrategia metodológica es buena, 40% la considera muy buena, mientras que un 22% lo considera excelente.

4.1.2. Análisis, interpretación y discusión de resultados de los datos de la variable dependiente: comprensión de la integral definida

Tabla 12. **Nivel de logro en el Pre test variable dependiente comprensión de la integral definida**

		Pre test (estandarizado)			
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	En inicio	177	89,8	89,8	89,8
	En proceso	20	10,2	10,2	100,0
	Total	197	100,0	100,0	

Gráfico 66. **Nivel de logro en el Pre test variable dependiente comprensión de la integral definida**

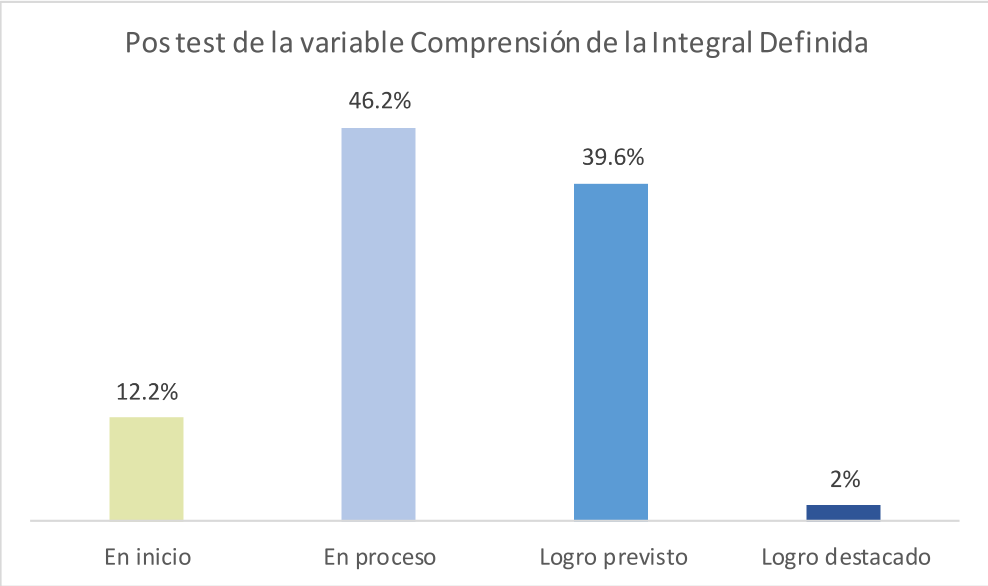


De acuerdo a los resultados descritos en la tabla (12) y la gráfica (66), sobre la variable comprensión de la integral definida en la pre prueba; se encuentra que, 177 estudiantes de la muestra que corresponde al 89.8% están ubicados en el nivel de logro en inicio, 20 estudiantes que representan el 10,2%, se sitúan en el nivel de logro en proceso.

Tabla 13. **Nivel de logro en el Pos test variable dependiente comprensión de la integral definida**

Pos test (agrupado)					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	En inicio	24	12,2	12,2	12,2
	En proceso	91	46,2	46,2	58,4
	Logro previsto	78	39,6	39,6	98,0
	Logro destacado	4	2,0	2,0	100,0
	Total	197	100,0	100,0	

Gráfico 67. **Nivel de logro en el Pos test variable dependiente comprensión de la integral definida**

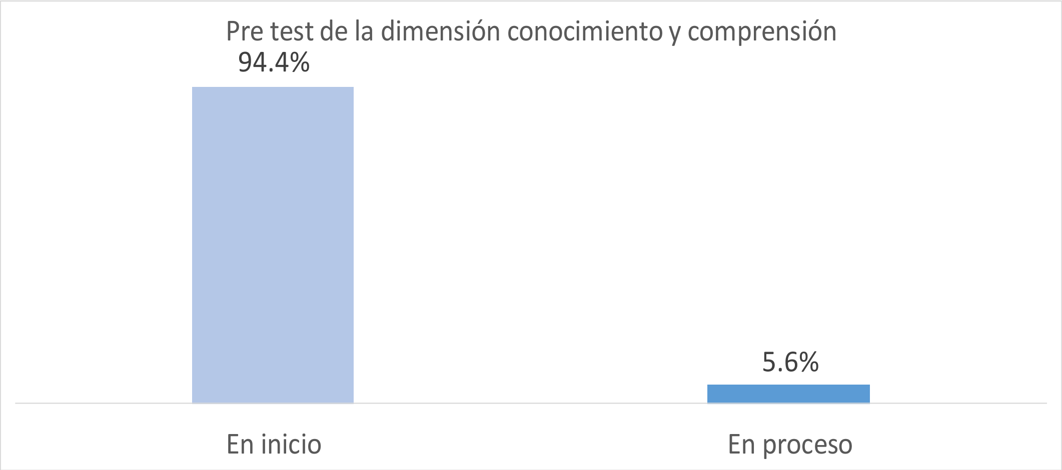


Conforme a los resultados detallados en la tabla (13) y la gráfica (67), la variable comprensión de la integral definida en la pos prueba, se encuentra que 91 estudiantes representados por el 46,2% alcanzaron el nivel de logro en progreso, 78 estudiantes representados por el 39,6% obtuvieron el nivel de logro previsto, 24 integrantes correspondientes al 12,2% se encuentran en el nivel de logro en inicio, mientras que 4 estudiantes que representan el 2,0% alcanzaron el nivel de logro destacado.

Tabla 14. **Nivel del logro en el Pre test_Dimensión: Conocimiento y comprensión de la integral definida**

		Pre test (estandarizado)			
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	En inicio	186	94,4	94,4	94,4
	En proceso	11	5,6	5,6	100,0
	Total	197	100,0	100,0	

Gráfico 68. **Nivel de logro en el Pre test_Dimensión: Conocimiento y comprensión de la integral definida**

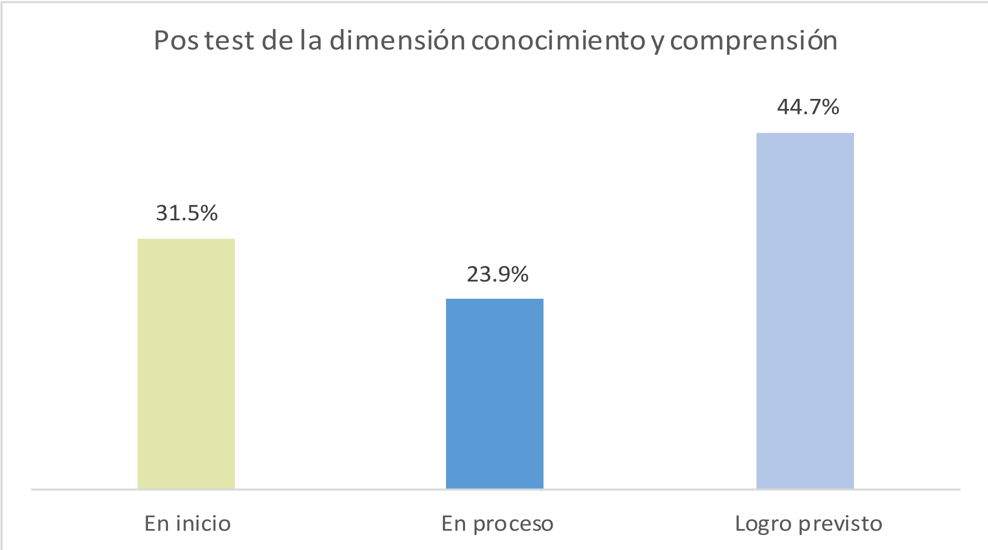


Conforme a los resultados detallados en la tabla (14) y la gráfica (68), sobre la dimensión conocimiento y comprensión de la integral definida en la pre prueba, se encuentra que 186 estudiantes de la muestra, que representan el 94,4% se encuentran en el nivel de logro en inicio, mientras que 11 estudiantes representados por el 5,6% alcanzaron el nivel de logro en proceso.

Tabla 15. **Nivel de logro en el Pos test_Dimensión: Conocimiento y comprensión de la integral definida**

		Pos test (estandarizado)			
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	En inicio	62	31,5	31,5	31,5
	En proceso	47	23,9	23,9	55,3
	Logro previsto	88	44,7	44,7	100,0
	Total	197	100,0	100,0	

Gráfico 69. **Nivel de logro en el Pos test_Dimensión: Conocimiento y comprensión de la integral definida**

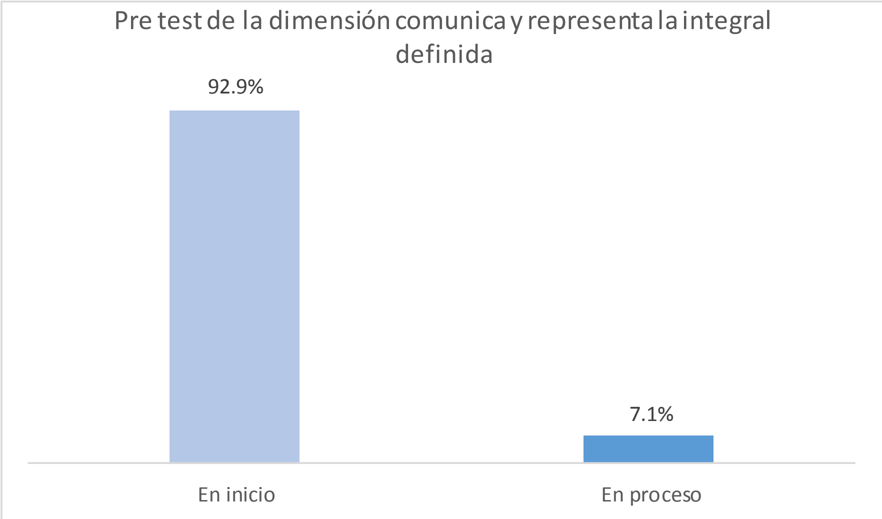


Conforme a los resultados detallados en la tabla (15) y la gráfica (69), sobre la dimensión conocimiento y comprensión de la integral definida en la pos prueba, se encuentra que 88 estudiantes representados por el 44,7% alcanzaron el nivel logro previsto, 62 participantes correspondientes al 31,5% lograron el nivel de logro en inicio, mientras que 47 estudiantes que representan el 23,9% alcanzaron el nivel de logro en proceso.

Tabla 16. **Nivel de logro en el Pre test_Dimensión: Comunica y representa de la integral definida**

Pre test (estandarizado)					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	En inicio	183	92,9	92,9	92,9
	En proceso	14	7,1	7,1	100,0
	Total	197	100,0	100,0	

Gráfico 70. **Nivel logro en el Pre test_Dimensión: Comunica y representa de la integral definida**

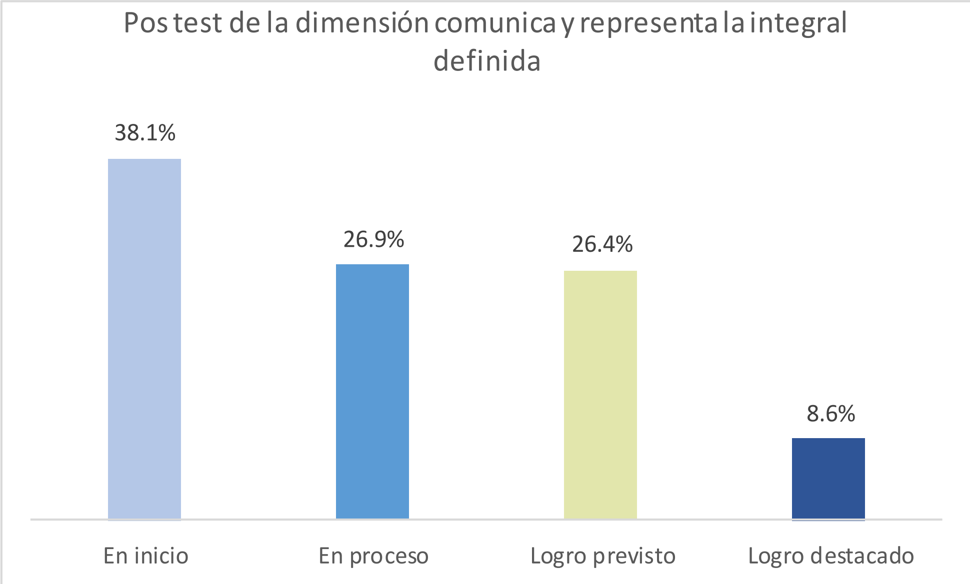


Conforme a los resultados detallados en la tabla (16) y la gráfica (70), sobre la dimensión comunica y representa de la integral definida en la pre prueba, se encuentra que 183 estudiantes de la muestra, que representan el 92,9% se encuentran en el nivel de logro en inicio, mientras que 14 estudiantes representados por el 7,1% alcanzaron el nivel de logro en proceso.

Tabla 17. **Nivel de logro en el Pos test_Dimensión: Comunica y representa de la integral definida**

Pos test (estandarizado)					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	En inicio	75	38,1	38,1	38,1
	En proceso	53	26,9	26,9	65,0
	Logro previsto	52	26,4	26,4	91,4
	Logro destacado	17	8,6	8,6	100,0
	Total	197	100,0	100,0	

Gráfico 71. **Nivel de logro en el Pos test_Dimensión: Comunica y representa de la integral definida**

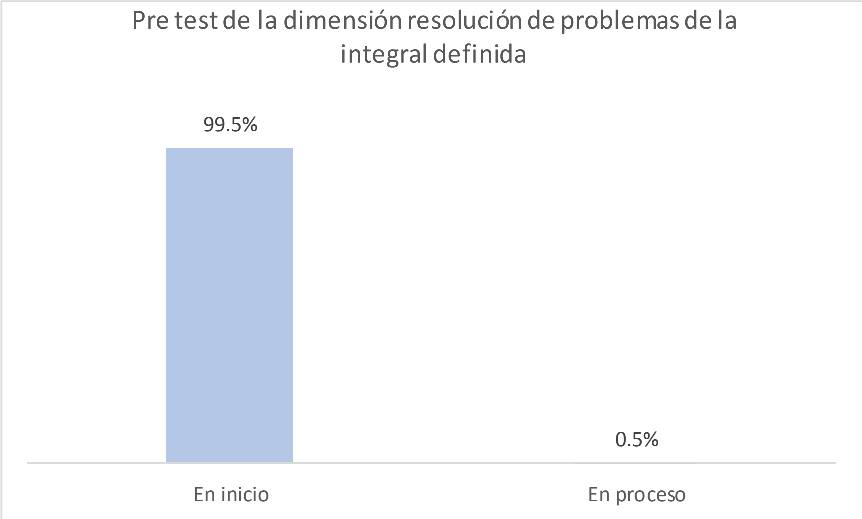


Conforme a los resultados detallados en la tabla (17) y la gráfica (71), sobre la dimensión conocimiento y comprensión de la integral definida en la pos prueba, se encuentra que 75 estudiantes representados por el 38,1% alcanzaron el nivel logro en inicio, 53 estudiantes correspondientes al 26,9% obtuvieron el nivel de logro en proceso, 52 integrantes representados por el 26,4% alcanzaron el nivel logro previsto, mientras que 17 estudiantes que representan el 8.6% obtuvieron el nivel logro destacado.

Tabla 18. **Nivel de logro en el Pre test_Dimensión: Resolución de problemas de la integral definida**

Pre test (estandarizado)					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	En inicio	196	99,5	99,5	99,5
	En proceso	1	,5	,5	100,0
	Total	197	100,0	100,0	

Gráfico 72. **Nivel de logro en el Pre test_ Dimensión: Resolución de problemas de la integral definida**

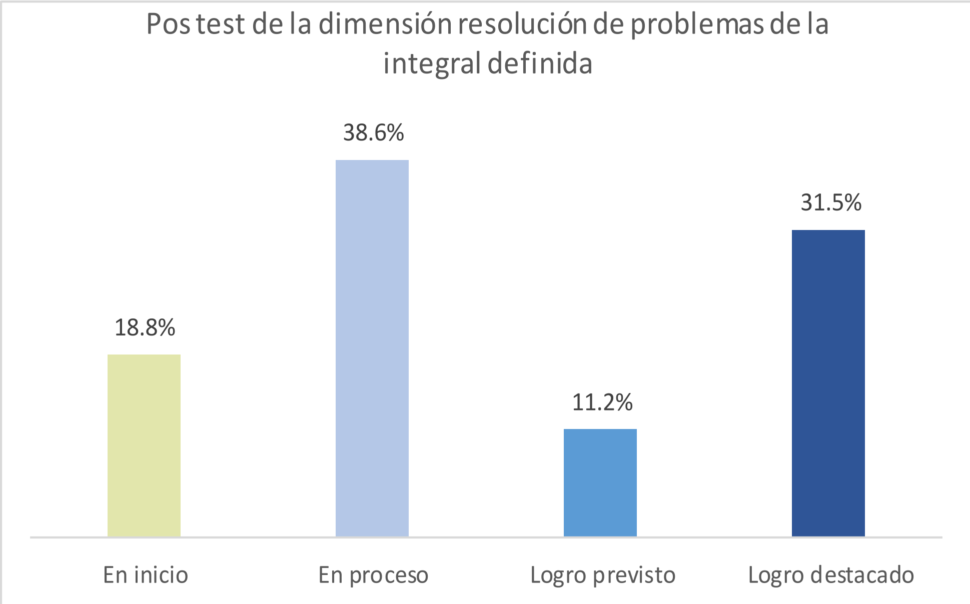


Conforme a los resultados detallados en la tabla (18) y la gráfica (72) sobre la dimensión resolución de problemas de la integral definida en la pre prueba, se encuentra que 196 alumnos que conforman la muestra, que representan el 99,5% han alcanzado el nivel de logro en inicio y 1 estudiante que representa el 0,5% alcanzó el nivel de logro en proceso.

Tabla 19. **Nivel de logro en el Pos test_Dimensión: Resolución de problemas de la integral definida**

Pos test (estandarizado)					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	En inicio	37	18,8	18,8	18,8
	En proceso	76	38,6	38,6	57,4
	Logro previsto	22	11,2	11,2	68,5
	Logro destacado	62	31,5	31,5	100,0
	Total	197	100,0	100,0	

Gráfico 73. **Nivel de logro en el Pos test_Dimensión: Resolución de problemas de la integral definida**



Conforme a los resultados detallados en la tabla (19) y la gráfica (73), sobre la dimensión resolución de problemas de la integral definida en la pos prueba, se encuentra que 76 estudiantes representados por el 38,6% alcanzaron el nivel de logro en proceso, 62 participantes correspondientes al 31,5% obtuvieron el nivel de logro destacado, 37 integrantes que representan el 18,8% alcanzaron el nivel de logro en inicio, mientras que 22 estudiantes que representan el 11,2% obtuvieron el nivel logro previsto.

4.2. Prueba de las hipótesis

En cuanto a la prueba de hipótesis se siguió el procedimiento basado en las evidencias que proporciona la muestra y el marco conceptual de la teoría probabilística. En ese sentido, para evaluar si la hipótesis es rechazada o no, los datos tuvieron un tratamiento estadístico a través de software diseñados especialmente para este propósito. Bajo ese punto de vista los datos recogidos fueron organizados en una base de datos que proporciona la hoja de cálculo Excel, el mismo que fueron procesados por la herramienta estadística SPSS 21.

Para el respectivo procesamiento, análisis e interpretación estadística se utilizó los conceptos y metodologías de la estadística descriptiva e inferencial. En ese sentido, se utilizó la prueba paramétrica T de Student para diferencias de medias en muestras independientes. La prueba T de Student permite evaluar la hipótesis nula, que nos indica que la media poblacional en estudio es igual a un valor especificado μ_0 (valor calculado).

Para el logro de este propósito se utilizará el siguiente estadístico;

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

Donde: “ $\overline{x}$, representa la media de la muestra; *s,* representa la desviación estándar de la muestra; *n*, representa el tamaño de la muestra y *n*-1, indica los grados de libertad” (Salas, 2018, p.78) .

4.2.1. Prueba de la hipótesis general

I. Formulación de la hipótesis general

HG1. La aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la comprensión de la integral definida, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento – Perú, 2018.

II. Regla de decisión

- Si el valor de la significancia representado por “p” es mayor al valor 0,05; se acepta la hipótesis nula y se rechaza la hipótesis alterna.
- Si el valor de la significancia representado por “p” es menor al valor 0,05; la hipótesis nula se rechaza y la hipótesis alterna es aceptada.

III. Prueba de hipótesis a través de los estadísticos pertinentes.

Tabla 20. **Diferencia de medias de la variable dependiente: Comprensión de la integral definida**

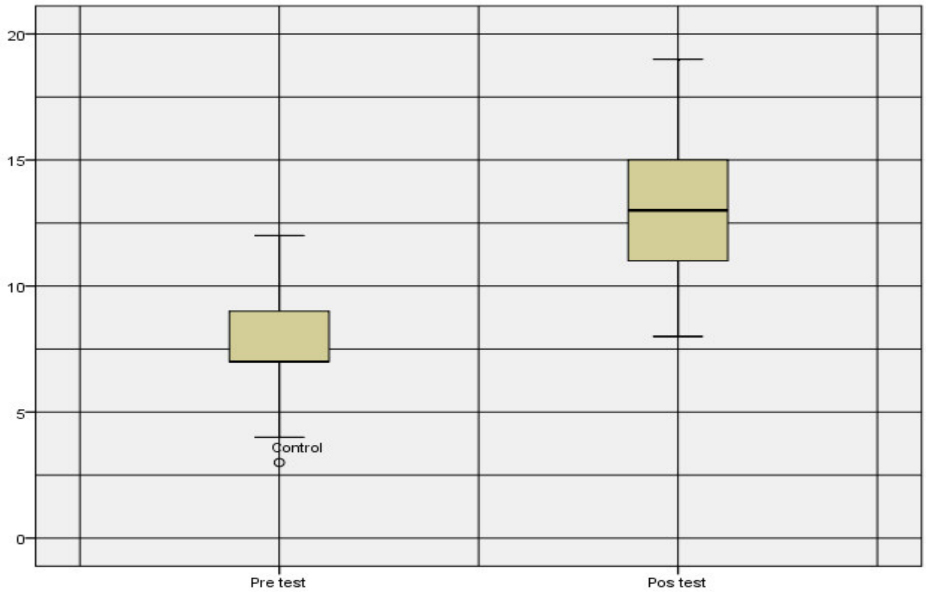
Estadísticos de grupo					
	Grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Pre test	Control	159	7,72	1,732	,137
	Experimental	38	8,61	1,925	,312
Pos test	Control	159	12,21	1,859	,147
	Experimental	38	15,82	1,333	,216

Tabla 21. **Significancia de la variable dependiente: Comprensión de la integral definida**

Prueba de muestras independientes					
		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias	
		F	Sig.	t	gl
Pre test	Se han asumido varianzas iguales	1,942	,165	-2,760	195
	No se han asumido varianzas iguales			-2,586	52,242
Pos test	Se han asumido varianzas iguales	9,684	,002	-11,281	195
	No se han asumido varianzas iguales			-13,789	75,598

A la luz de resultados, se confirma que existe una diferencia de medias alcanzadas por el grupo experimental y el grupo de control en la evaluación de entrada de alrededor de 0,89. Luego de aplicar estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema se comprobó un incremento de 3,61 entre las diferencias de medias del grupo control y experimental. De manera que las estrategias permiten incrementar los promedios académicos en 2,72 puntos entre el pre y pos test. Es preciso señalar que la significancia en este análisis es de 0,002; que es menor a 0,05. En consecuencia la hipótesis de trabajo se acepta; corroborándose con esto que, la utilización de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejoró favorablemente en la comprensión de la integral definida.

Grafico 74. **Caja de medias del pre y pos test de la variable dependiente**



Observamos que en el grupo experimental el desplazamiento de las cajas hacia la parte superior del gráfico significa que la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema ha dado resultado, ya que las calificaciones aumentaron; puesto que en el pre test las calificaciones no superaban el promedio 15, sin embargo, en el pos test este promedio fue superado.

4.2.2. Prueba de las hipótesis específicas

4.2.2.1. Prueba de hipótesis específica 01

H1. La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión conocimiento y comprensión de la integral definida, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento – Perú, 2018.

Tabla 22. **Diferencia de medias de la dimensión conocimiento y comprensión de la integral definida**

Estadísticos de grupo					
	Grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Pre test	Control	159	7,84	1,423	,113
	Experimental	38	7,53	1,006	,163
Pos test	Control	159	12,61	3,609	,286
	Experimental	38	15,79	2,549	,413

Tabla 23. **Significancia de la dimensión conocimiento y comprensión de la integral definida**

Prueba de muestras independientes					
		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias	
		F	Sig.	t	gl
Pre test	Se han asumido varianzas iguales	,872	,351	1,269	195
	No se han asumido varianzas iguales			1,563	76,681
Pos test	Se han asumido varianzas iguales	11,961	,001	-5,129	195
	No se han asumido varianzas iguales			-6,323	76,830

Los resultados estadísticos que se muestran corroboran que las medias alcanzadas por el grupo control y experimental en la evaluación de entrada consiguieron una diferencia de medias de 0,31, luego de aplicar las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema se comprobó un incremento de 3,18 entre las diferencias de medias del grupo control y experimental. De manera se aprecia que las estrategias permiten incrementar los promedios académicos en 2,87 puntos entre el pre y pos test. Es preciso señalar que la significancia en este análisis es de 0,001; que es menor a 0,05. En consecuencia la hipótesis de trabajo se acepta; corroborándose que la utilización de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema Mejoró favorablemente la dimensión conocimientos y comprensión de la integral definida.

4.2.2.2. Prueba de hipótesis específica 02

H2. La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión comunica y representa de la integral definida, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento – Perú, 2018.

Tabla 24. **Diferencia de medias de la dimensión comunica y representa de la integral definida**

Estadísticos de grupo					
	Grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Pre test	Control	159	7,02	2,079	,165
	Experimental	38	6,08	1,148	,186
Pos test	Control	159	11,54	3,719	,295
	Experimental	38	13,82	2,369	,384

Tabla 25. **Significancia de la dimensión comunica y representa de la integral definida**

Prueba de muestras independientes					
		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias	
		F	Sig.	t	gl
Pre test	Se han asumido varianzas iguales	10,873	,001	2,687	195
	No se han asumido varianzas iguales			3,779	102,927
Pos test	Se han asumido varianzas iguales	10,885	,001	-3,596	195
	No se han asumido varianzas iguales			-4,696	86,391

Los datos estadísticos que se muestran corroboran que las medias alcanzadas por el grupo experimental y el grupo de control en la evaluación de entrada consiguieron una diferencia de medias de 0,94. Luego de aplicar las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema se comprobó un incremento de 2,28 entre las diferencias de medias del grupo control y experimental. De manera se aprecia que las estrategias permiten incrementar los promedios académicos en 1,34 puntos entre el pre y pos test. Es preciso señalar que la significancia en este análisis es de 0,001; que es menor a 0,05. En consecuencia la hipótesis de trabajo se acepta; corroborándose que la utilización de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejoró favorablemente en la dimensión comunicación y representación de la integral definida.

4.2.2.3. Prueba de hipótesis específica 03

H3. La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión resolución de problemas de la integral definida, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento – Perú, 2018.

Tabla 26. **Diferencia de medias de la dimensión resolución de problemas de la integral definida**

Estadísticos de grupo						
	Grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Pre test	Control	159	7,35	1,317	,104
	Experimental	38	6,68	,620	,101
Pos test	Control	159	13,76	4,310	,342
	Experimental	38	15,39	3,251	,527

Tabla 27. **Significancia de la dimensión resolución de problemas de la integral definida**

Prueba de muestras independientes					
		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias	
		F	Sig.	t	gl
Pre test	Se han asumido varianzas iguales	16,054	,000	3,014	195
	No se han asumido varianzas iguales			4,565	125,664
Pos test	Se han asumido varianzas iguales	8,083	,005	-2,191	195
	No se han asumido varianzas iguales			-2,600	71,648

Los datos estadísticos que se muestran confirman que las medias logradas por el grupo de control y el grupo experimental en la evaluación de entrada consiguieron una diferencia de medias de 0,67. Luego de aplicar las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema se comprobó un incremento de 1,63 entre las diferencias de medias del grupo control y experimental. De manera se precia que las estrategias permiten incrementar los promedios académicos en 0,96 puntos entre el pre y pos test. Es preciso señalar que la significancia en este análisis es de 0,005; que es menor a 0,05. En consecuencia la hipótesis de trabajo se acepta; corroborándose que la utilización de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejoró favorablemente en la dimensión resuelve problemas de la integral definida.

4.3. Presentación de resultados

La presente investigación centró su atención en dar respuesta al objetivo general planteado: "Demostrar la influencia de la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre la comprensión de la integral definida, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento – Perú, 2018".

En el análisis de la hipótesis general a través de la variable: estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema y la comprensión de la integral definida, en base al tratamiento estadístico se halló que en el pre test entre el grupo de control y experimental estableció una diferencias de medias de X=0,89, situándose en el nivel de inicio. Respecto a la post prueba entre el grupo de control y experimental se encontró una diferencia de medias de X=3,61, alcanzando el nivel de logro en proceso. Por lo tanto, existe un incremento de 2,72 puntos entre las medias del grupo experimental y el grupo de control.

Respecto al análisis de los resultados de la primera hipótesis específica; se analizaron los resultados obtenidos para la variable independiente: estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema; y la dimensión conocimiento y comprensión; que en base al tratamiento estadístico en el pre test entre el grupo al cual se aplicó la estrategia y grupo de control se estableció una diferencia de medias de X= 0,31 situándose en el nivel de logro en inicio. En relación a la prueba de post test entre el grupo al cual se aplicó la estrategia y grupo de control se encontró una diferencia de medias de X= 3,18, alcanzando el nivel de logro en inicio, aunque la cantidad de estudiantes en este nivel es menor al del pre test, se considera una manera una mejora sustancial; determinándose así un incremento de 2,87 de puntos entre la variable de estudio y la respectiva dimensión analizada.

En referencia a la segunda hipótesis específica se analizaron los resultados de la variable independiente: estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema y la dimensión comunica y representa; que en base al tratamiento estadístico en el pre test entre el grupo al cual se aplicó la estrategia y grupo de control, se estableció una diferencia de medias de X= 0,94 situándose en el nivel de logro en inicio. En relación a la prueba de post test entre el grupo el grupo al cual se aplicó la estrategia y grupo de control, se encontró una diferencia de medias de X= 2,28, alcanzando el nivel logro en proceso; determinándose de este modo un incremento de 1,34 puntos entre la variable de estudio y dimensión abordada.

Con respecto al análisis estadístico de la tercera hipótesis específica, se analizaron los resultados de la variable independiente: estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema; y la dimensión resolución de problemas, que en base al tratamiento estadístico en el pre test entre el grupo al cual se aplicó la estrategia y grupo de control, se estableció una diferencia de medias de X= 0,67 situándose en el nivel de logro en inicio. En relación a la prueba de post test entre el grupo al cual se aplicó la estrategia y grupo de control, se encontró una diferencia de medias de X= 1,63, situándose en el nivel de logro en inicio. Sin embargo, su promedio académico también experimentó un incremento 0.96 de puntos entre la variable de estudio y la dimensión analizada.

Como vemos los resultados presentados en la presente investigación comprueban que los estudiantes se adaptan a nuevas metodologías, como la referida a las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema para la comprensión de la integral definida. En ese sentido, los resultados obtenidos en la presente investigación tienen similitud a los de Salgado (2015) quien destaca que estas estrategias permiten que los estudiantes se involucren más en el desarrollo de problema, a partir del uso de conceptos construidos con anterioridad, así como la creación de nuevas preguntas y conceptos sin ayuda docente. Siguiendo a la autora, las estrategias, contribuyó a los aprendizajes de los estudiantes; sin embargo, enfatiza que esto es parte de un proceso, posición que compartimos, puesto que no todos los estudiantes se adaptan a cambios tan repentinos en el abordaje de la comprensión de un concepto. Por ejemplo, en nuestra investigación notamos una evolución de un pre test con un nivel de logro en inicio por parte de los estudiantes, a un pos test con un nivel logro en proceso; que si bien es un avance importante; esto, parte del compromiso docente en gestionar los espacios de aprendizajes más idóneos, que partan de la necesidad, motivación y el interés por aprender por parte de los estudiantes; y de la aplicación de estrategias metodológicas en el aula, tal como se sugiere en la presente investigación. En ese sentido, es importante que los estudiantes gestionen su autonomía de sus propios aprendizajes lo que les van a permitir aprender y poder mejorar mientras se afiance esta metodología en el aula.

En cuanto al aprendizaje de las matemáticas, Arteaga (2006) destaca que una las dificultades que se manifiestan en los estudiantes es el poco interés y motivación. En esa reflexión es necesario que el docente debe presentarse como un agente que ayude a cambiar dichas actitudes, alertando la necesidad de aplicar la "Teoría adaptativa". El referido autor, comprobó que la práctica de esta metodología en los estudiantes permitió que un mayor porcentaje de alumnos de bajo conocimientos previos mejoraran. Estos resultados nos permiten reforzar lo planteado inicialmente, que toda estrategia metodológica responde a una necesidad que debe ser evaluada previamente para garantizar los aprendizajes y la comprensión de conceptos matemáticos como es nuestro caso.

Conclusiones

1) En la hipótesis general se comprobó que la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema, mejora el aprendizaje de la integral definida, puesto que; la mayoría de la población en estudio alcanzó un nivel de logro en proceso con un incremento de 2,72 entre los promedios académicos del pre y pos test. En ese sentido, se destaca que la efectividad de esta estrategia permitió en los estudiantes un incremento relativo en sus conocimientos con respecto a la comprensión de la integral definida como concepto matemático, como es nuestro caso. 2) En la primera hipótesis específica se comprobó que la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema, mejora la dimensión conocimiento y la comprensión de la integral definida, puesto que; la mayoría de la población en estudio alcanzó el nivel de logro previsto con un incremento de 2,87 entre los promedios académicos del pre y pos test. Por lo cual, se destaca que la efectividad de esta estrategia permitió en los estudiantes un incremento relativo en sus conocimientos con respecto a la comprensión de la integral definida como concepto matemático. 3) La segunda hipótesis específica encontró que la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema, mejora la dimensión comunicación y representación de la integral definida, puesto que; la mayoría de la población en estudio alcanzó el nivel de logro en inicio, a pesar de ello, consiguió un incremento de 1,34 entre los promedios académicos del pre y pos test. Por lo cual, se destaca que la efectividad de esta estrategia permitió en los estudiantes un incremento relativo en sus conocimientos con respecto a la comprensión de la integral definida, como concepto matemático. 4) La tercera hipótesis específica comprobó que la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema, mejora la dimensión resolución de problemas de la integral definida, puesto que; la mayoría de la población en estudio alcanzó el nivel logro en proceso con un incremento de 0,96 entre los promedios académicos del pre y pos test. Por lo cual, se destaca que la efectividad de esta estrategia permitió en los estudiantes un incremento relativo en sus conocimientos con respecto a la comprensión de la integral definida, como concepto matemático.

Recomendaciones

1. Se recomienda a las autoridades de los Colegios de Alto Rendimiento y a las autoridades de la Dirección de Educación Básica con desempeño Sobresaliente y Alto Rendimiento (Debedsar), implementar programas de capacitación docente sobre las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema, ya que; permitirá fortalecer la práctica docente relacionados a la comprensión del concepto de un objeto matemático, como es la integral definida en nuestro caso.
2. Se sugiere al docente ampliar sus conocimientos sobre las estrategias metodologías de enseñanza aprendizaje basada en acción proceso objeto esquema y la implementación de los mecanismos de comprensión: interiorización, coordinación; encapsulación, desencapsulación y tematización; desde las sesiones de clase. Esto permitirá, abordar la comprensión de un concepto con secuencia lógica, a través de una pertinente descomposición genética del concepto; evitando de este modo vacíos de conceptos.
3. Se recomienda a los docentes proponer situaciones significativas que permitan articular la comprensión del concepto matemático con la aplicación de este, en situaciones del contexto real; esto a través de investigaciones cortas, exploraciones matemáticas o monografías.
4. Se recomienda a los docentes realizar las conexiones entre la matemática con otros campos del conocimiento para que la comprensión cobre significancia; esto permitirá desarrollar habilidades de mayor complejidad en los estudiantes; entre ellos, la argumentación, el análisis, la inferencia, en el marco del desarrollo del pensamiento matemático avanzado; y el pensamiento crítico.
5. Se recomienda a las Autoridades de las Facultades de Educación de las Universidades implementar las estrategias metodológicas desarrolladas en la presente investigación, para establecer líneas de investigación desde las aulas del claustro universitario, sobre los diferentes conceptos de la competencia matemática, según el Currículo Nacional.

Referencias bibliográficas

Aldana, E. (2011). *La comprensión del concepto de la integral definida en el marco de la teoría APOE*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

----- (2013). *Una didáctica de la matemática para la investigación en pensamiento matemático avanzado*. Atenas, 3 (23), 56-59.

Arteaga, B. (2006). *La educación adaptativa: una propuesta para la mejora del rendimiento en matemáticas de los alumnos de enseñanza secundaria obligatoria.* Tesis Posgrado. Universidad Complutense de Madrid, España. Recuperado en:https://eprints.ucm.es/7424/1/t29532.pdf

Asiala, M. (1996). *The development of students graphical understanding of the derivate*. Journal of Mathematic Behavior, 16(4), 339-431.

Aranda, M. (2015). *Análisis de la construcción del concepto de la integral definida en estudiantes de bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Alicante.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-7966-6

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bressan, A. & Zolkower, B. & Gallego, F. (2004). *La educación matemática realista*. Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.

Camacho, C. (2003). *Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2, 2.

Camacho, C., Azcarate C. y Gonzalez, M., y Moreno, M. (2003). *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. Números.

Revista de Didáctica de las Matemáticas. Vol. 92, julio de 2016, p.145-147.

Cózar, J. (2004). *Planteamiento didáctico. Intervención sobre el desarrollo de capacidades, habilidades, estrategias en alumnos con deficiencias de aprendizaje en ciencias sociales*. Facultad de ciencias de la educación. Universidad de Granada.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cruz, C. (2010). *La enseñanza de la modelación matemática en ingeniería*. Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela, 25(3), 39-46. Recuperado en 06 de septiembre de 2018, de: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-40652010000300005&lng=es&tlng=es.

Cruz, J. (2015). *Una propuesta didáctica basada en aprendizaje colaborativo para aprendizaje del cálculo de volúmenes de sólidos de revolución*. Tesis para obtener el grado de Magíster en enseñanza de las matemáticas. Guadalajara, Jalisco.

Curotto, M (2010). *La metacognición en el aprendizaje de la matemática*. Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología — Volumen 2, Número 2, Noviembre 2010. Página 14.

Davis, R. (1982). *The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages*. Journal of mathematic behavior, 5(3),281-303.

De Vries, D. (2001). *RUMEC / APOS Theory Glossary*. Georgia Collage & State University.Milledgeville.http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html. [Disponible el 18 de agosto de 2008].

Depool, R. A. (2004). *La Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en un Entorno Computacional. Actitudes de los Estudiantes Hacia el uso* *de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

Dreyfus, T. (1991). *Proceso de pensamiento matemático avanzado*. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking processes.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.

Dreyfus, T. y Eisenberg T. (1990), *On the Reluctance to Visualize in Mathematics*, en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), Visualization in Teaching and Mathematics, Estados Unidos, maa Series.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Avanced Mathematical Thinking*. En Tall, D. (Ed), Avanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publisher. Dorrecht/Boston/London. Pp. 231-243.

Dubinsky, E. & Tall, D. (1991). *Avanced Mathematical Thinking in the computer*. En Tall, D. (Ed), Avanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publisher. Dorrecht/Boston/London. Pp. 95-123.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

----- (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la RSME, 143-168.

Erickson, H. L. (2007) *Concept-based Curriculum & Instruction for the Thinking Classroom (2ª.ed.).* Thousand Oaks, California (EE.UU.): Corwin Press, 2007.

----- (2008). *Stirring the Head, Heart and Soul: Redefining curriculum, instruction, and concept-based learning.*Thousand Oaks, California (EE.UU.): Corwin Press.

Garbín, S. (2015). *Investigar en pensamiento matemático avanzado*. En Ortiz, José; Iglesias Martha (Eds.), Investigaciones en Educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación (pp.137-153). Universidad de Carabobo. Maracay. Venezuela.

Hernández, L. y Trigueros, M. (2012). *Acerca de la comprensión de la comprensión del concepto del supremo*. Educación Matemática, 24(3), 67 – 87

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. 6ta edición. Mc Graw-Hill/ Interamericana Editores S.A de C.V.

Hitt, F. (2003). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. Investigaciones en educación matemática Vol. I. Grupo Editorial Iberoamericana, México.

Irazoqui, E. (2015). *El aprendizaje del Cálculo Diferencial: Una propuesta basada en la modularización*. Tesis para obtener el grado de Doctor en Educación de la Universidad de Salamanca.

Janvier, C. (1987). *Representations and understanding: The notion of function as an example*. In C, Janvier. (Ed). Problems of representation in the teaching and learning of mathematic. NJ: Lawrence Er, p. 67-71.

Lech, R. (1987). *Representations and translation among representations in mathematic learning and problem solving*. In C, Janvier. (Ed). Problems of representation in the teaching and learning of mathematic. NJ: Lawrence Er, pp. 27-32.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo.* Oxford University Press-Harla. México.

López, R. (2011). *Aplicación de estrategias didácticas para estimular el pensamiento crítico de los estudiantes del cuarto y quinto año de educación básica de la escuela fiscal Pedro Vicente Maldonado de la ciudad de Baños, durante el mes de noviembre del 2010 hasta marzo del 2011*. Tesis para obtener la licenciatura en ciencias de la educación. Universidad Técnica de Ambato. Ecuador.

López, C. (2015). *Los materiales educativos concretos en el aprendizaje significativo del área de matemática en los estudiantes del sexto grado de educación primaria de la institución educativa particular Ana Frank del distrito de Mariano Melgar, Arequipa 2015.* Tesis para optar la licenciatura en Educación Primaria. Arequipa. Perú.

Macías, J. (2014). *Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalizacion en el aprendizaje*. Revista de investigación educativa Conectad@s. Volumen V. p.39.

Maurtua, J. (2015). *Aplicación de estrategias metodológicas basadas en la razón de cambio en el mejoramiento del nivel de logro en la construcción del concepto de la derivada. El caso de los estudiantes del quinto grado del Colegio Mayor Secundario Presidente del Perú*. Tesis para obtener el grado de Magíster en Educación matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima.

Mendoza, M. (2003). *Representaciones de la derivada de una función.* Tesis para obtener el grado de maestro en ciencias con orientación en matemática. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo en México.

Minedu (2015). *Rutas de aprendizaje. Versión 2015. ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes?* Área curricular Matemática 3°. 4° y 5° grados de Educación Secundaria. Lima.

Minedu (2016). *Modelo Pedagógico para la atención de estudiantes de alto desempeño en los Colegios de Alto Rendimiento*. DEBEDSAR. Lima.

Minedu (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima.

Minedu (2018). *Orientaciones para la Evaluación de los Aprendizajes Pedagógico para la atención de estudiantes de alto desempeño en los Colegios de Alto Rendimiento*. DEBEDSAR. Documento de Trabajo p.3. Lima.

Moreno, I. (2010). *“Las estrategias metodológicas y su influencia en el desarrollo de las destrezas productivas (speaking and writing) del idioma ingles en los estudiantes del noveno año de educación básica del Colegio Nacional “Mariano Benitez” sección nocturna, ubicado en el Cantón Pelileo Parroquia la Matriz en el periodo 2009 -2010”.* Para la obtención de la licenciatura en ciencias de la educación. Universidad Técnica de Ambato. Ecuador.

OCDE (s/f*). El Programa PISA de la OCDE*. *¿Qué es y para qué sirve?* Resumen ejecutivo.

Organización del Bachillerato Internacional-OBI (2012). *Programa del Diploma. Guía de Matemáticas NM. Primeros exámenes 2014.*Cardiff.

Organización del Bachillerato Internacional-OBI (2014). *El Programa de los Años Intermedios: de los principios a la práctica.* Cardiff.

Orton, A. (1983). *Students Understanding of Integration. Educational Studies in Mathematics.* D. Rediel Publishing Company. Dordrecht: Holland/Boston: U.S.A. *14, (1),* 1 – 18

Peña, L. y Morales, J. (2016). *La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva.* Revista Educación en Ingeniería, 11(21), pp.64-71. Bogotá.

Piaget, J. (1990). *Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia, en la colección Psicología y Educación*. La enseñanza de las matemáticas, pp. 3-28. Madrid: Aguilar.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo XXI.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1997). *Psicología del niño.* Madrid.

Planchart, O. (2002). *La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función*. Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Morelos de México.

Quintana, D. (2010). *Tratamiento didáctico de la derivada - la aplicación del programa derive*. Tesis para optar el Grado de Magister. Universidad de Piura. Perú.

Quintanilla, C. (2009). *Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOS.* Tesis para obtener el grado de Magíster en enseñanza de las matemáticas. Universidad Católica del Perú. Lima.

Rodríguez, M., Parraguez, M. y Trigueros, M. (2018). *Construcción cognitiva del espacio vectorial* R^2. Revista Latinoamericano de Investigación Matemática. Vol.21, Num. 1.

Salas, G. (2018). *Uso de Materiales Didácticos y Aprendizaje de la Matemática en las estudiantes del Primer Grado de Secundaria - I.E. Parroquial "Reina de la Paz" – Ugel 03– San Isidro – Lima, 2018.* Tesis para optar el grado de Magíster en Educación. UNMSM. Lima.

Salgado, H. (2015). *El papel de la modelación en la Enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal.* Tesis Posgrado. Instituto Politécnico Nacional, México D.F. México. Recuperado en: https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/18088/Hilda%20Margarita%20Salgado%20Sota.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sánchez-Matamoros, G., & García, M., & Llinares, S. (2013). *Algunos Indicadores del Desarrollo del Esquema de Derivada de una Función*. Boletín de Educación Matemática, 27 (45), 281-302.

Santos, M. (2000). *The use of representations as a vehicle to promote students' mathematical thinking in problema solving*. The international Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 7 (3), 193-212.

Sardón, D. (2014). *Estrategias metodológicas para desarrollar habilidades geométricas en los estudiantes del IV ciclo de la IEP N° 70390 de Patapata.* Tesis para obtener la segunda especialidad en currículo regional e interculturalidad. Universidad del Altiplano.Puno.

Serna, G. (2013). *Estrategias de aprendizaje (ACRA), estrategias metodológicas del docente y rendimiento académico en estudiantes de Maestría de las Facultades de educación y administración de la Universidad Nacional San Antonio de Abad de Cusco. Año 2011*. Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima.

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* Educational Studies in Mathematics, 22: 1-36.

----- (1992). *Operational origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – the case of Function*. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.) *El concept of function: Aspects of Epistemology* (pp. 59–84). Washinton DC: Mathematical Association of America.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* Sexta edición. Editorial Cengage. México.

Tall, D. y Vinner, S (1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity.* Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tarazona, F., Maurtua, J. y Gil, J. (2017). *Didáctica de la Trigonometría*. Universidad San Ignacio de Loyola. Lima.

Trigueros, M. (2005). *La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior*. Educación Matemática 17 (1), 5-31.

Valle, A., & Barca, a., & Gonzalez, R. & Nuñez, J. (1999). *Las estrategias de aprendizaje revisión teórica y conceptual*. Revista Latinoamericana de Psicología, 31 (3), 425-461.

Vega, M., Carrillo, J. & Soto, J. (2014). *Análisis según el Modelo Cognitivo APOS del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada*. Boletín de Educación Matemática, 28 (48), 403-429.

Wiggins, G.; Mc Tigue, J. (2005). *Understanding by Design (2.°edición. ampliada)*. Alexandria, Virginia (EE. UU.): ASCD.Publications.

ANEXOS

Anexo 1: Matriz de consistencia

TITULO: Estrategias metodológicas basadas en Acción Proceso Objeto Esquema y comprensión de la integral definida en estudiantes de los Colegios de Alto Rendimiento.

Problema	Objetivo	Hipótesis	Variables	Diseño	Técnicas
1.1 Problema general ¿De qué manera la aplicación de estrategias metodológicas basadas en Acción Proceso Objeto Esquema, influye en la comprensión de la integral definida en estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna, Perú 2018? 1.1 Problemas específicos a) ¿De qué manera la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema influye en la dimensión conocimiento y comprensión, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la	2.1 Objetivo general Demostrar la influencia de la aplicación de las estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema en la comprensión de la integral definida en estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018. 2.2 Objetivos específicos a) Precisar la influencia de la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre la dimensión conocimiento y comprensión, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.	3.1 Hipótesis general La aplicación de estrategias metodológicas basadas en Acción Proceso Objeto Esquema, mejora la comprensión de la integral definida en estudiantes del 5to grado de secundaria de los Colegios de Alto Rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna - Perú 2018. 3.2 Hipótesis específicas a) La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión conocimiento y comprensión, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región	4.1 Independiente Estrategias metodológicas basadas en Acción, Proceso, Objeto y Esquema. 4.2 Dependiente: Comprensión de la integral definida.	Investigación Cuasi experimental con pre-prueba y post-prueba. GRUPO / PRE TEST / VARIABLE INDEPENDIENTE / POST TEST G.E / O / X / O G.C / O / / O G.E.= Grupo Experimental G.C.= Grupo de control X = Variable independiente: Estrategias metodológicas O = Observación y medición previa de la variable dependiente Comprobación de hipótesis por diferencias de medias Prueba de confiabilidad la prueba de Alfa de Cronbach	• Fichaje. • Encuesta. • Prueba escrita • Observación.

región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018? b) ¿De qué manera la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema influye en la dimensión comunica y representa, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018? c) ¿De qué manera la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema influye en la dimensión resolución de problemas, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018?	b) Conocer la influencia de la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre la dimensión comunica y representa, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018. c) Experimentar la influencia la aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema sobre la dimensión resolución de problemas, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.	La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018. b) La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión comunica y representa, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018. c) La aplicación de estrategias metodológicas basada en acción proceso objeto esquema mejora la dimensión resolución de problemas, en los estudiantes del 5to grado de secundaria de los colegios de alto rendimiento de la región La Libertad, Piura y Tacna – Perú, 2018.			

Anexo 2: Cuestionario sobre la estrategia metodológica acción-proceso-objeto-esquema

CUESTIONARIO SOBRE LA APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA METODOLÓGICA ACCIÓN-PROCESO-OBJETO-ESQUEMA

FECHA: ………/………../2018

Estimado estudiante: el objetivo del cuestionario permite evaluar la pertinencia de la aplicación de la estrategia metodológica Acción- Proceso- Objeto- Esquema.

Por favor, sigue las siguientes instrucciones:

a) Lee cuidadosamente y de forma clara los enunciados de las preguntas
b) No dejes preguntas sin contestar
c) Marca con una aspa en sólo uno de los cuadros de cada pregunta

Recordar: La escala de valoración para el siguiente instrumento es como se muestra:

1: Deficiente	2: Regular	3: Buena	4: Muy buena	5: Excelente

Estrategia Metodológica		1	2	3	4	5
1	Cómo aprecias los procedimientos utilizados para interiorización del concepto de la integral definida en la sesión de clase.					
2	Cómo aprecias los procedimientos utilizados para coordinación de conceptos relacionados a la comprensión de la integral definida en la sesión de clase.					
3	Cómo aprecias los procedimientos utilizados para encapsulación y desencapsulación del concepto de la integral definida en la sesión de clase.					
4	Cómo aprecias los procedimientos utilizados para la tematización del concepto de la integral definida en situaciones del contexto real, en la sesión de clase.					
Comprensión de la integral definida		1	2	3	4	5
5	Cómo consideras la influencia de la estrategia metodológica para mejorar en la dimensión conocimiento y comprensión de la integral definida.					
6	Cómo consideras la influencia de la estrategia metodológica para mejorar en la dimensión comunica y representa la integral definida.					
7	Cómo consideras la influencia de la estrategia metodológica para mejorar en la dimensión resuelve problemas sobre la integral definida.					

¡MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 3: Unidad y sesión de aprendizaje

IV UNIDAD DE APRENDIZAJE MATEMÁTICA "NM"

"La integral como una herramienta para hallar áreas y volúmenes"

I. Datos generales

1.1 Colegio de Alto Rendimiento	: La Libertad-Piura-Tacna
1.2 Asignatura	: Matemáticas NM
1.3 Bimestre	: II
1.4 Duración	: Del 18 de junio al 14 de julio.
1.5 Horas pedagógicas	: 24 horas.
1.6 Grado y sección	: 5° A, B, C, D
1.7 Docentes	: José Luis Maurtua Aguilar.

Vínculo con el proyecto interdisciplinario:
Sí: _X_ Título 2: Using English in Everyday Life

II. Descripción de la unidad

La realidad actual educativa exige que la educación matemática esté vinculada al contexto local y global, al desarrollo de capacidades y competencias teniendo en cuenta los enfoques de enseñanza y aprendizaje. La presente unidad aborda la integral definida, en cuyo tratamiento se pondrá énfasis en la comprensión del concepto, para ello, se ha hecho una descomposición genética del concepto considerando las actividades cognitivas del estudiante como la Acción, Proceso, Objeto, lo cual implica la interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación y tematización del concepto matemático. Así mismo, se resolverán situaciones relacionadas al área de la región formada bajo la curva de una función, cinemática, economía, entre otros.

La presente unidad corresponde a la competencia **Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio,** donde se priorizará los tópicos sobre: La partición de un intervalo, aproximación área formada debajo de una curva, la suma de Riemann, la integral definida y sus aplicaciones a situaciones reales.

III. Principios pedagógicos

Principios pedagógicos Coar			
X	El estudiante como centro del proceso de enseñanza y aprendizaje	**X**	La indagación como base del proceso enseñanza-aprendizaje
X	El desarrollo de competencias transversales y específicas de alta exigencia	**X**	El uso de herramientas tecnológicas para la innovación
X	El desarrollo de la mentalidad local y global para una mejor	**X**	La interdisciplinariedad para la comprensión de grandes

	comprensión del mundo		ideas
	La evaluación como la principal estrategia de aprendizaje		

IV. Organización de sesiones

Sesión de aprendizaje	N° de horas	Conocimientos	Desempeños precisados
1-3 “Comprendiendo la descomposición genética de la suma de Riemann”	06	• Introducción a la sumatoria. • Partición de un intervalo. • Área como aproximación de regiones formadas debajo de una curva.	• Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares, simbólicas y lenguaje algebraico su comprensión sobre la sumatoria, partición de un intervalo cerrado y la suma inferior y superior de un área debajo de una curva. • Plantea afirmaciones sobre las características que distinguen a la suma de Riemann y la integral definida, propiedades de cálculo y aplicaciones.
4-6 “Comprendiendo la descomposición genética de la suma de Riemann”	06	• Área como aproximación de regiones formadas debajo de una curva como el límite de una suma. • La suma de Riemann y la integral definida.	• Plantea afirmaciones sobre las características que distinguen a la suma de Riemann y la integral definida, propiedades de cálculo y aplicaciones. • Descarta la validez de sus afirmaciones mediante un contraejemplo; mediante propiedades

			matemáticas o el razonamiento inductivo y deductivo.
7-9 “Comprendiendo el teorema fundamental del cálculo a partir del valor medio”	06	• Teorema del Valor medio. • Teoremas fundamentales del cálculo.	• Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares, simbólicas y lenguaje algebraico su comprensión sobre las aplicaciones de la integral definida en problemas contextualizados, estableciendo relaciones y conjeturas entre sus representaciones sobre el teorema del valor medio y el primer y segundo teorema fundamental del cálculo. • Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos tecnológicos, métodos gráficos y de cálculo, propiedades de la integral para la comprensión del el teorema del valor medio y el primer y segundo teorema fundamental del cálculo.
10-12 “Aplicando la integral definida a situaciones de la vida real”		• Área debajo de una curva. • Volumen de un sólido de revolución.	• Usa estrategias para identificar, seleccionar y aplicar adecuadamente el concepto de la indefinida para calcular el área formada debajo

	06		de una región sombreada y el volumen de un sólido de revolución. • Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y lenguaje algebraico su comprensión sobre la aplicación de la integral definida a diversos contextos de la vida real.

V. Valoración de los aprendizajes

Competencia	Criterios de evaluación	Indicador(es)	Instrumento	Evidencia
Resuelve problemas regularidad, equivalencia y cambio	• Conocimiento y Comprensión • Comunicación e interpretación • Resolución de problemas	• Analiza la transferencia de los conocimientos previos relacionados a sumatorias y funciones para aplicarlos a la comprensión de la Integral Definida. • Representa de forma gráfica y analítica la partición de un intervalo cerrado. • Interpreta y analiza el área superior e inferior de una región formada debajo de una curva como aproximación.	• Rúbrica de Trabajo en aula. • Lista de cotejo. • Práctica calificada • Esquema de calificación de práctica.	• Trabajo grupal e individual. • Preguntas de las pruebas del Bachillerato internacional (IB) 1 y 2 Matemática NM. • Problemas desarrollados de la separata.

		• Usa estrategias de identificación, de simulación y de procesos para la comprensión del área de una región formada debajo de una curva como suma límite. • Utiliza diferentes registros de representación para la comprensión de la integral definida. • Reconoce las propiedades y características fundamentales de la integral definida.	• Rúbrica de Trabajo en aula. • Lista de cotejo. • Práctica calificada. • Esquema de calificación de práctica.	• Trabajo grupal e individual • Preguntas de las pruebas del Bachillerato internacional (IB) 1 y 2 Matemática NM. • Problemas desarrollados de la separata.
	• Enfoque de indagación	• Determina el teorema fundamental cálculo a partir de las demostraciones del valor medio de la integral. • Analizar la forma y el método que los estudiantes utilizan en la resolución de ejercicios sobre el cálculo de áreas y volúmenes. • Determinar qué tipo de argumentos en cuanto a las formas de representación (gráfico, algebraico, numérico) utilizan los estudiantes para justificar la propiedad aditiva de la Integral Definida.	• Rúbrica para evaluar resolución de problemas. • Rúbrica para evaluar conocimiento y comprensión del tema. • Lista de cotejo para evaluar indagación y particip	• Prácticas desarrolladas por el estudiante en su cuaderno. • Resolución individual de hojas de trabajo. • Pruebas individuales o grupales resueltas.

			ación activa en un trabajo colaborativo.	
		• Analiza la relación entre la imagen y la definición del concepto respecto a la continuidad e integrabilidad. • Analiza la comprensión del concepto de la integral definida, para hallar el área formada debajo de una curva y el volumen de un sólido de revolución. • Argumenta el nivel de la relación entre la definición del concepto y la imagen del concepto de Integral Definida.	• Rúbrica de Trabajo en aula. • Lista de cotejo. • Prueba escrita • Esquema de calificación de práctica.	• Prácticas desarrolladas por el estudiante en su cuaderno. • Resolución individual de hojas de trabajo. • Pruebas individuales o grupales resueltas.

VI. Bibliografía y/o recursos de soporte para el docente y estudiante (libros, plataformas, páginas web, entre otros)

6.1 Para el Docente:

- Buchanan, L; Fensom, J; Kemp, E; La Rondie, P; Stevens, J. (2015). *Matemáticas Nivel Medio.* New York: Oxford University Press.
- Demana, Walts, Foley & Kennedy. (2007*). Pre Cálculo*. México: Pearson.
- Haese, R; Haese, S; Haese, M (2012); *Mathematics SL.3º edition.* Australia: Haese Mathematics.
- Hasser, Lasalle, Sullivan. (1993). *Análisis Matemático Vol I*. Editorial Trillas. México.

- Instituto de Ciencias y Humanidades (2011), *Aritmética, análisis de números y sus aplicaciones*. Lima- Perú: Lumbreras Editores.
- Stewart, J; Redlin, L. & Saleem (2012). *Pre Cálculo*. México: Cengage Learning.

6.2 Para el Estudiante:

- Buchanan, L; Fensom, J; Kemp, E; La Rondie, P; Stevens, J. (2015). *Matemáticas Nivel Medio.* New York: Oxford University Press
- Demana, Walts, Foley, Kennedy. (2007*). Pre Cálculo*. México: Pearson.
- Haese, R; Haese, S; Haese, M (2012); *Mathematics SL.3º edition.* Australia: Haese Mathematics.
- Instituto de Ciencias y Humanidades (2011), *Aritmética, análisis de números y sus aplicaciones*. Lima- Perú: Lumbreras Editores.
- Stewart, J (2012). *Cálculo de una variable.Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.
- Stewart, J; Redlin, L. & Saleem (2012). *Pre Cálculo*. México: Cengage Learning.

JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

UNIDAD IV– SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 1-3

"Comprendiendo la descomposición genética de la suma de Riemann"

I. Datos generales

1.1 Colegio de Alto Rendimiento: LA LIBERTAD/PIURA/TACNA
1.2 Asignatura : MATEMÁTICA NIVEL MEDIO (NM)
1.3 Horas pedagógicas : 06
1.4 Fecha : 25 al 30 de junio del 2018
1.5 Grado y sección :QUINTO A, B, C, D.
1.6 Profesor :JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

II. Vínculo con los componentes del programa del diploma y el proyecto interdisciplinario

x	Teoría del Conocimiento		Monografía
	Creatividad, actividad y servicio		Proyecto interdisciplinario
x	Mentalidad Internacional		
Vínculo con TDC: Se motiva la participación activa de los estudiantes para responder la pregunta de conocimiento: ¿Es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia? **Vínculo con Mentalidad Internacional:** Se reflexionará sobre el desarrollo y los aportes del cálculo integral a través de la historia y de las diferentes culturas.			

III. Proceso de enseñanza-aprendizaje

Capacidades: • Elabora y usa modelos algebraicos. • Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. • Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales. • Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.
Desempeños precisados: • Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares, simbólicas y lenguaje algebraico su comprensión sobre la sumatoria, partición de un intervalo cerrado y la suma inferior y superior de un área debajo de una curva. • Plantea afirmaciones sobre las características que distinguen a la suma de Riemann y la integral definida, propiedades de cálculo y aplicaciones.
Temáticas: • Introducción a la sumatoria.

<table>
<tr><td colspan="3">

- Partición de un intervalo.
- Área como aproximación de regiones formadas debajo de una curva.

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Evidencia:

- Trabajo grupal e individual
- Preguntas de las pruebas del Bachillerato internacional (IB) 1 y 2 Matemática NM.
- Problemas desarrollados de la separata.

</td></tr>
<tr><th>Actividades en la enseñanza-aprendizaje: Interiorización</th><th>Recursos y materiales</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td>

BLOQUE I

INICIO

- Se inicia la sesión de clase reflexionando sobre el performance de los estudiantes en la evaluación diagnóstica. En ese sentido se pregunta: ¿cuál es su apreciación respecto a su rendimiento en la prueba? ¿cuáles fueron los ítems de mayor y menor dificultad?
- El docente escucha e interviene para puntualizar o aclarar aspectos relacionado a la evaluación. Así mismo traza la ruta para la comprensión del concepto de la integral definida en la presente unidad.
- El docente presenta el vídeo denominado: Johann Carl Friedrich Gauss niño genio, a través del link: https://www.youtube.com/watch?v=JG-yPNIXdbQ Los estudiantes establecen sus puntos de vista sobre lo observado.

- Luego se pregunta cuál es la diferencia entre una sucesión, progresión y sumatoria. Los estudiantes socializan sus respuestas. Al respecto se presentan ejemplos de sumatorias:
  - $\sum_{i=3}^{6} \frac{i^2}{i+1} = \frac{3^2}{3+1} + \frac{4^2}{4+1} + \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1}$
  - $\sum_{k=4}^{9} kb_k = 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 + 7b_7 + 8b_8 + 9b_9$
  - $\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f$

  Se solicita analizar y plantear su solución de estos y otras sumatorias.
- En este momento se crea la necesidad de aprendizaje de las sumatorias.

PROCESO

</td><td>

Dispositiva

Laptop

vídeo

</td><td>

10’

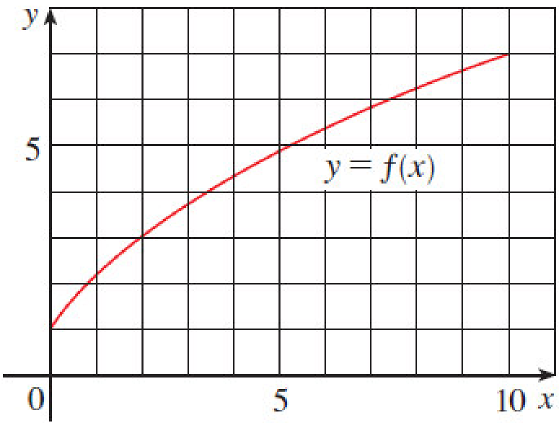
70’

</td></tr>
</table>

- Se inicia la construcción secuenciada del objeto matemático respondiendo al enfoque de la descomposición genética de la sumatoria. En ese sentido se inicia con las propiedades de las sumatorias de manera que permitan partir desde la idea más elemental hasta llegar a deducir otras de mayor grado de complejidad. - El docente presente diapositivas para explicar, demostrar y ejemplificar los siguientes teoremas: ✓ $\sum_{i=1}^{n} c = cn$, donde c es cualquier constante. ✓ $\sum_{i=1}^{n} cF(i) = c\sum_{i=1}^{n} F(i)$, donde c es una constante. ✓ $\sum_{i=1}^{n}[F(i)+G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$ ✓ **Teorema: La telescópica de una sumatoria.** $\sum_{i=1}^{n}[F(i+1)-F(i)] = F(n+1)-F(1)$ - Luego, se plantea a través de trabajo en equipo la demostración y socialización de las fórmulas de las sumas: De los primeros números naturales. De los números impares. De los números pares De los cuadrados, - A continuación se solicita a los alumnos formar nuevos grupos de 3 integrantes para resolver problemas y ejercicios de la ficha de trabajo. - Se hace referencia que los criterios a evaluar está relacionada a conocimiento y comprensión, y comunicación matemática. Así mismo de los principios pedagógicos del desarrollo de competencias complejas, la indagación. - Se registra las intervenciones y aportes de los estudiantes. **CIERRE:** - Se realiza la reflexión sobre la comprensión del objeto matemático y la pertinencia de la secuencia temática (descomposición genética	Power Point Laptop Pizarra	 10’

de la sumatoria). - Así se realiza una autoevaluación sobre los niveles de participación, identificando las fortalezas y debilidades y como superarlos. **BLOQUE II** **INICIO** - El docente inicia la sesión tema recogiendo los conocimientos previos respecto de intervalos cerrados y partición de un intervalo. - Solicita a los estudiantes que señalen en qué contexto real se puede aplicar este concepto matemático. - Se hace referencia que el tema anterior y este nuevo permitirán la construcción y comprensión de un nuevo concepto, base para la comprensión del concepto de la integral definida al término de la presente unidad de aprendizaje. **PROCESO** - Se presenta un vídeo sobre la partición de un intervalo a través del link: https://www.youtube.com/watch?v=HTMRdtC25HI - Luego el docente propicia la comprensión del objeto matemático a través de las siguientes preguntas: • ¿qué diferencia hay entre un intervalo cerrado y abierto? • ¿cuántos subintervalos cerrados pueden estar incluidos en un intervalo cerrado? • ¿Cómo se determina la longitud de un intervalo cerrado? • ¿En un contexto real, cual es la implicancia del número de particiones de un intervalo cerrado? • ¿En qué situación de la vida real se puede evidenciar el concepto de la partición de un intervalo cerrado? - El docente organiza las respuestas y complementa la información utilizando una hoja de Excel para analizar y explicar el llenado de un tanque cuando esto se realiza en intervalo de tiempo cada vez más pequeños.	Diapositiva Laptop Ficha de trabajo Ficha de autoevaluación Diapositiva Laptop Ficha de trabajo	10’ 70’

- Se introduce el concepto de Intervalo y sub-intervalo; en ese sentido se recomienda la siguiente definición formal *"Una partición de un intervalo cerrado* $[a,b]$ *es un conjunto finito de puntos* $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$ *del intervalo* $[a,b]$ *con la condición que* $a=x_0<x_1<x_2<....<x_n=b$. *Una partición divide al intervalo como una unión de los intervalos más pequeños, es decir;* $[a,b]=[a,x_0]\cup[x_1,x_2]\cup....\cup[x_{n-2},x_{n-1}]\square[x_{n-1},b]=\bigcup$ *.La longitud de esos subintervalos se denomina incremento de* x_i *y se representa por:* $$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$$ *Donde n indica el número de subintervalos"* - Luego del análisis se plantean y resuelven situaciones para la construcción y comprensión del objeto matemático relacionado a la partición de un intervalo cerrado. Por ejemplo: 1. **Sea el intervalo [0,1].** ● Halle la partición del intervalo, al dividir al intervalo en 2 subintervalos. Señale la longitud de cada uno de ellos. ● Halle la partición del intervalo, al dividir al intervalo en 4 subintervalos. Señale la longitud de cada uno de ellos ● Si dividimos el intervalo en n subintervalos, halle la partición del intervalo y la longitud de cada uno de ellos De igual manera con los otros ejercicios del material enviado: ● para que sean resueltos con participación de los alumnos. ● Desarrollados estos, se menciona como se puede relacionar estas particiones de un intervalo cerrado con el cálculo del área bajo una curva. 2. **Lea los valores a partir de la gráfica dada de f**. • Grafique 4 rectángulos de bases iguales	Diapositiva Hoja de calculo	

debajo de la curva en el intervalo correspondiente al dominio de f.  ● Considerando el lado izquierdo del rectángulo, calcule el área de cada rectángulo formado y súmelos. ¿Qué representa esta suma? ● Considere ahora 5 rectángulos y siguiendo el mismo procedimiento anterior, responda cuál de las áreas es mayor. Si se consideran 10 rectángulos, cuál es el área mayor. - Luego del análisis precedente, se pide a los estudiantes considerar rectángulos formados por debajo y encima de una curva utilizando el geogebra, considerando una función cualquiera. - Se plantea a los estudiantes ¿cómo se podría calcular un área aproximada en esos casos? Los estudiantes participan y el docente registra esas participaciones. - El docente precisa algunos conceptos al respecto. - A continuación se formula el concepto del concepto de suma superior y suma inferior del área debajo y encima de la curva para el cálculo aproximado del área bajo la curva. - **Luego se analiza el área como aproximación de regiones formadas debajo de una curva. Para ello, se realizan las siguientes actividades y preguntas como:** ● ¿Existe alguna relación entre la longitud de los sub intervalos es decir el ancho del rectángulo y la exactitud del área calculada? ¿cuál? Los estudiantes	Geogebra	

participan el docente registra esas participaciones haciendo las precisiones del caso. • Se plantean ejercicios de la hoja de trabajo relacionados a sumatorias, partición de un intervalo cerrado y el cálculo del área bajo una curva: Suma inferior y suma superior. • Se propone una actividad individual: Frenado de un automóvil, señalando los criterios a evaluar: Conocimiento y comprensión, comunicación matemática y resolución de problemas. **CIERRE:** Con los estudiantes se analiza lo aprendido, las dificultades y fortalezas. Se pregunta ¿en qué situaciones de la vida real es aplicable la comprensión del objeto matemático: partición de un intervalo? ¿Por qué? ¿Qué conceptos matemáticos están involucrados en la comprensión del concepto? ¿Qué aspectos debemos mejorar? **BLOQUE III** **INICIO:** • El docente inicia planteando un conflicto cognitivo: • *De acuerdo a lo aprendido hasta ahora, ¿Sólo es posible calcular áreas superior e inferior de una región formada debajo una curva? ¿Cuánto menos ancha sea la base del rectángulo formado debajo de la curva; es decir, la longitud del intervalo sea menor, más exacta será el área? ¿Será posible calcular el área exacta de una región formada debajo una curva? ¿Cómo?* • Los estudiantes participan y el docente registra y organiza las respuestas en la pizarra. Así mismo agrega si es posible sumar las áreas de los infinitos rectángulos formados por encima y debajo de la curva. En ese contexto se desencapsula el concepto de suma infinita y el concepto de límites.		10’ 10’

• Luego el docente plantea la pregunta de TDC: ¿Es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia? ¿Es siempre exacta? Los estudiantes aproximan sus respuestas a través de una lluvia de ideas y el docente las sintetiza. **PROCESO** • Se hace un recuento del concepto de infinito e infinitesimal. • Una vez analizadas las respuestas a las preguntas planteadas el docente indica que si es posible calcular el área exacta. En ese momento introduce el nuevo concepto matemático llamado la suma de Riemann**.** • Se presenta el vídeo sobre la suma de Riemann a través del link: www.youtube.com/watch?v=WGNjdIUzu3k • Se realizan interrogantes sobre la aplicación de la suma de Riemann a funciones negativas. ¿cuál es la diferencia de aplicar Riemann a funciones positivas y negativas? • Se realizan trabajo de comprensión a través de las diferentes representaciones matemáticas. En este caso se utiliza el geogebra para aclarar aspectos vinculados a la interrogante precedente. • Luego se plantean ejercicios de la suma de Riemann, con límite infinito tomados del libro Stewart James cálculo de una Variable. • El docente hace el seguimiento del trabajo de los estudiantes aclarando las dudas o vacíos de comprensión de concepto de la suma de Riemann. • Para asegurar la comprensión del objeto matemático el docente plantea la siguiente interrogante: ***¿Qué es la suma de Riemann? ¿Cuáles son las condiciones para la aplicación de la suma de Riemann? ¿En la suma de Riemann la longitud de la base de todos los rectángulos deben ser todos iguales o diferentes? ¿Por qué?*** • Los estudiantes participan y el docente orienta y precisa la notación matemática de este concepto matemático, enfatizando que el sumando está formado por el producto de la	Diapositiva Laptop	70’

base de cada rectángulo por su respectiva altura. • De este concepto se desprenderán alguna interrogantes: • Los estudiantes formados en equipo de 3 integrantes desarrollan actividades relacionadas al cálculo de áreas de regiones debajo de una curva a través de la suma de Riemann. **CIERRE:** Se realiza el análisis de las fortalezas y las debilidades para potenciarlas. Se pregunta: ¿Qué hemos aprendido en esta semana? ¿Para qué nos sirve en nuestra vida real? ¿Qué tema resultó más fácil y difícil? ¿Cómo se mejoró la comprensión del concepto de la suma de Riemann? ¿Respecto a la pregunta de TDC, es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia? ¿Existe una coherencia lógica en la descomposición genética del concepto de la suma de Riemann: sumatoria, partición de un intervalo? ¿Qué temas de investigación podemos abordar después de la comprensión de la suma de Riemann?	Ficha de trabajo Hoja de calculo Geogebra Práctica calificada	10’

IV. Valoración de la interiorización de los aprendizajes

Criterios	Evidencia	Indicadores de desempeños	Instrumentos de evaluación
Conocimiento y comprensión Comunica y representa Resolución de problemas	• Trabajo grupal e individual. • Resolución de Preguntas de pruebas IB 1 y 2 de Matemática NM.	• Analiza la transferencia de los conocimientos previos relacionados a sumatorias y funciones para aplicarlos a la comprensión de la Integral Definida. • Representa de forma gráfica y analítica la partición de un intervalo cerrado. • Interpreta y analiza el área superior e inferior de una región formada debajo de una curva como aproximación.	Rúbrica de Trabajo en aula. Lista de cotejo. Práctica calificada Esquema de calificación de práctica.

V. Bibliografía y/o recursos de soporte para el docente y estudiante

- Buchanan, L. y otros (2014). *Matemáticas Nivel Medio*. OXFORD.
- Fannon, P; Kadelburg, V; Wolley, B; Ward, S (2012); *Mathematics for the IB Diploma.* Gran Bretaña: Cambridge University Press.
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de una Variable*. Editorial Cengage. México.

JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

UNIDAD IV– SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 4-6

"Comprendiendo la descomposición genética de la suma de Riemann"

I. Datos generales

1.1 Colegio de Alto Rendimiento: LA LIBERTAD/PIURA/TACNA
1.2 Asignatura : MATEMÁTICA NIVEL MEDIO (NM)
1.3 Horas pedagógicas :06
1.4 Fecha : Del 02 al 07 de julio del 2018
1.5 Grado y sección :QUINTO A, B, C, D.
1.6 Profesor :JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

II. Vínculo con los componentes del programa del diploma y el proyecto interdisciplinario

x	Teoría del Conocimiento		Monografía
	Creatividad, actividad y servicio		Proyecto interdisciplinario
x	Mentalidad Internacional		
Vínculo con TDC: Se motiva la participación activa de los estudiantes para responder la pregunta de conocimiento: ¿Es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia? **Vínculo con Mentalidad Internacional:** Se reflexionará sobre el desarrollo y los aportes del cálculo integral a través de la historia y de las diferentes culturas.			

III. Proceso de enseñanza-aprendizaje

Capacidades: • Elabora y usa modelos algebraicos. • Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. • Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales. • Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.
Desempeños precisados: • Plantea afirmaciones sobre las características que distinguen a la suma de Riemann y la integral definida, propiedades de cálculo y aplicaciones. • Descarta la validez de sus afirmaciones mediante un contraejemplo; mediante propiedades matemáticas o el razonamiento inductivo y deductivo.
Temáticas: • Área como aproximación de regiones formadas debajo de una curva como el límite de una suma.

<table>
<tr><td colspan="3">

- La suma de Riemann y la integral definida.

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Evidencia:

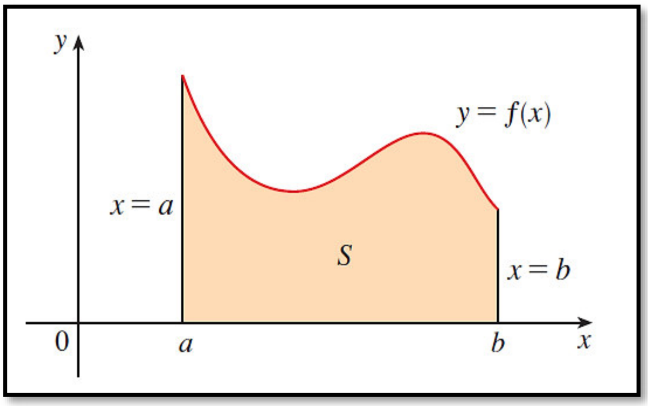
- Trabajo grupal e individual
- Preguntas de las pruebas del Bachillerato internacional (IB) 1 y 2 Matemática NM.
- Problemas desarrollados de la separata.

</td></tr>
<tr><td>Actividades en la enseñanza-aprendizaje: Coordinación de conceptos</td><td>Recursos y materiales</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>

BLOQUE I

INICIO

- En esta sesión el docente realiza un recuento de sobre las consideraciones para hallar el área de una región formada por debajo y por encima de la curva.
  Sin embrago, hace un añadido planteando de la siguiente manera. “hasta el momento sabemos que la partición de un intervalo cerrado nos permite dividir el segmento en n partes iguales de las cuales se pueden forman diversos rectángulos a las cuales se les puede calcular su área, estas por debajo o por encima de la curva”, tal como se muestra en la figura:



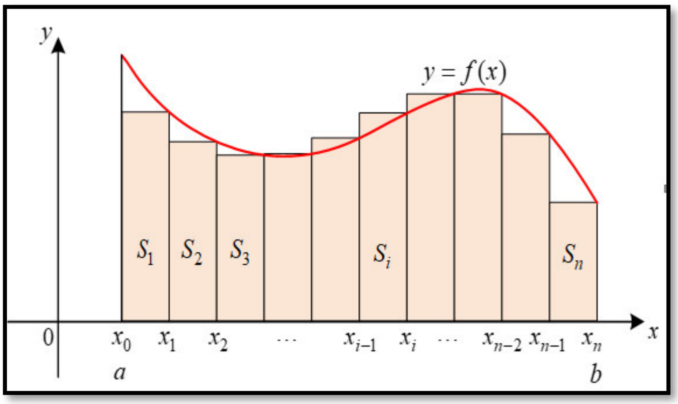
</td><td>

Dispositiva

Laptop

vídeo

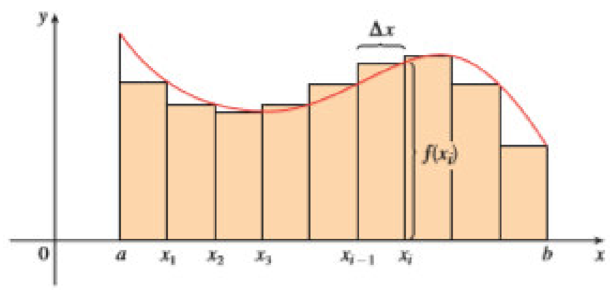
</td><td>10’</td></tr>
</table>

 • En ese análisis el docente plantea la siguiente interrogante: ¿Es posible hallar el área debajo de la curva cuando la longitud de cada partición del intervalo cerrado no sea la misma? ¿Es posible tal situación? ¿Cuáles son las condiciones que se deben de cumplir para hallar el área debajo de la curva? ¿Este procedimiento sigue siendo una suma de Riemann? • En ese momento se crea el conflicto cognitivo y la necesidad de aprendizaje del estudiante para establecer las diferencias y similitudes del tema planteado. • Luego el docente plantea la siguiente pregunta de TDC ¿Es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia? ¿Es siempre exacta? • A través de la lluvia de ideas los estudiantes participan y el docente organiza la información para aclarar y profundizar sobre lo dicho. **PROCESO** • El docente tomando empieza a **COORDINAR** los aprendizajes **INTERIORIZADOS** por los estudiante, es decir plantea, plantea la secuencia de procesos mostrando diversas gráficas para llegar a la siguiente definición correspondiente. Primero: Presenta la forma de calcular el área de la región formada debajo de la curva tomando como criterio básico tomar el extremo derecho izquierdo o derecho de cada	Power Point Laptop Pizarra	70’

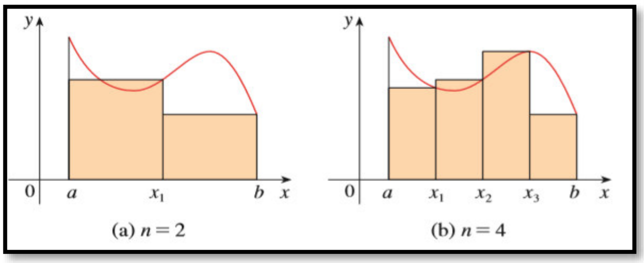
<table>
<tr>
<td>

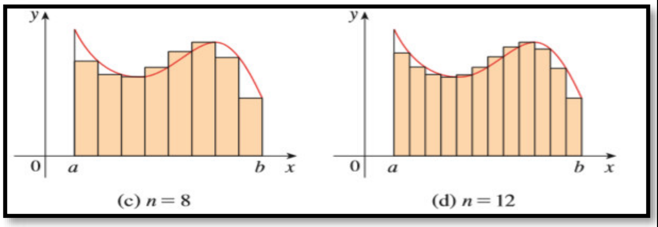
rectángulo.

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$



<u>Segundo:</u> Propone 4 casos para aproximar el área y determinar que se cumple con la suma de Riemann.





<u>Tercero:</u> Se deduce la definición.

2 DEFINICIÓN El **área** A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

- A partir de la INTERIORIZACIÓN de la definición utilizando las representaciones gráficas y algebraicas se presenta la situación nueva que corresponde ya no tomar el extremo derecho o izquierdo de del i-ésimo rectángulo sino tomar un punto cualquiera del intervalo que en cierta forma

</td>
<td>

Diapositiva

Laptop

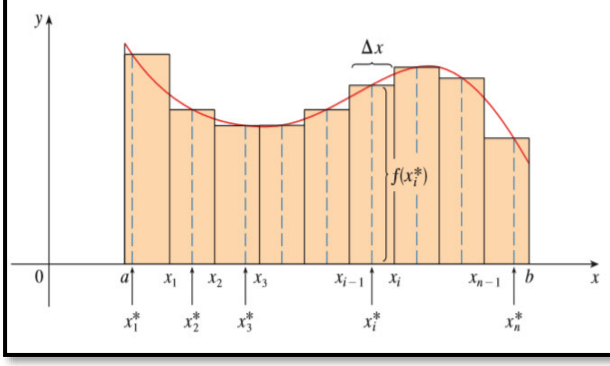
Ficha de trabajo

Ficha de autoevaluación

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
sería un punto cualquiera del i-ésimo rectángulo; es decir:

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$



- A partir del gráfico y de la INTERIORIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS PREVIOS, se llega a generalizar la suma de Riemann a través de las siguientes representaciones algebraicas.

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

- Se realizan el tratamiento de la suma de Riemann a través de aplicaciones (acciones) que el docente plantea en una ficha de trabajo.

CIERRE:

El docente recoge los trabajos y reparte una ficha de trabajo individual acerca de todos los temas vistos en la semana.

Junto con los estudiantes se hace un análisis de las fortalezas, (para potenciarlas) y debilidades (para superarlas) y también LA INTERIORIZACIÓN Y LA COORDINACIÓN de los conceptos tratados en la sesión.
</td>
<td>
Diapositiva

Laptop

Ficha de trabajo
</td>
<td>
10’
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

BLOQUE II

INICIO:

- El docente inicia la sesión comentando sobre la INTERIORIZACIÓN y COORDINACIÓN de algunos conceptos abordados hasta el momento; es decir, sobre la suma de Riemann, las aplicaciones para hallar la distancia recorrida por un objeto. Además comenta sobre otras aplicaciones que tiene el concepto encapsulado (la suma de Riemann) para hallar la longitud de una curva, volúmenes de sólidos de revolución, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y trabajo.
- Promueve la revisión de cada uno de estos aspectos y se socializa en la clase.

PROCESO:

- Se presenta un vídeo que trata sobre la suma de Riemann y la integral definida. La idea es establecer similitudes y diferencias entre estos dos objetos matemáticos.
- Enseguida el docente organiza la información y establece que la integral definida es una suma de Riemann, dadas a través de la siguiente definición:

2 DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Haga que $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ como los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b,** es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

- Se realizan diversas aplicaciones propuestas en la ficha de trabajo elaborada, en la que además se proponen situaciones del contexto para ser abordada por el concepto de la integral definida.

CIERRE:

Se socializan resultados y se pide a los estudiantes que indiquen que conceptos han INTERIORIZADOS y de qué manera los han

</td>
<td>

Diapositiva

Laptop

Ficha de trabajo

Hoja de calculo

Geogebra

</td>
<td>

10’

70’

10’

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>COORDINADO para la comprensión del concepto de la integral definida. Además de que representaciones matemáticas se ha valido para la comprensión de la integral definida. Finalmente ¿en qué situaciones matemática y del contexto se va aplicar la integral definida? Y ¿cómo se va a aplicar?

BLOQUE III

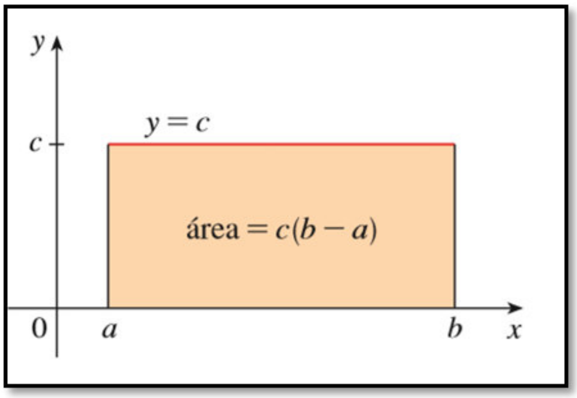
INICIO:

Se pide a los estudiantes a comprobar como la comprensión del concepto de la integral definida nos ayuda a entender las diversas aplicaciones que tiene en la vida real. En ese sentido, se analiza el siguiente vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=4DcueiGF_Os; Para obtener aportes y conclusiones al respecto.

Luego el docente pregunta de qué propiedades gozan las integrales definidas. La idea central es que el estudiante INTERIORICE y COORDINE los aprendizajes anteriores y se vea interesado en la comprensión de nuevos conceptos.

PROCESO:

El docente propone una serie de imágenes para que a partir de ellas se deduzcan algunas propiedades de la integral definida.


</td>
<td>Diapositiva

Laptop

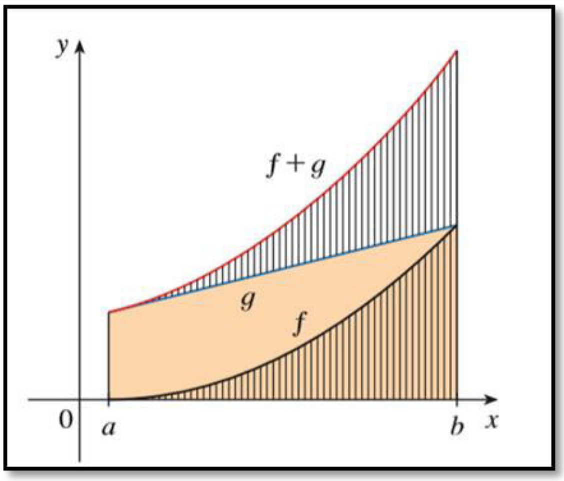
Ficha de trabajo

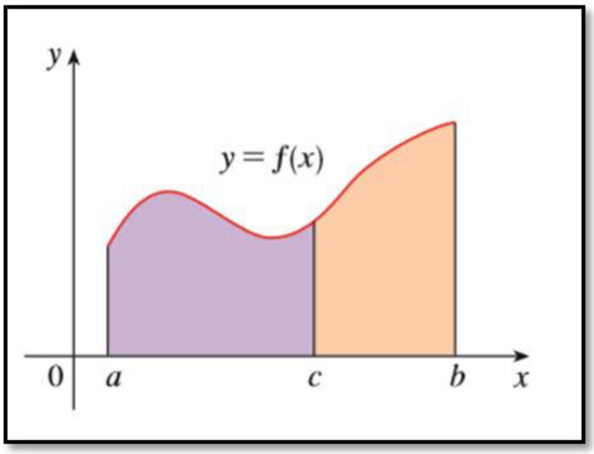
Hoja de calculo

Geogebra

Práctica</td>
<td>10’

70’</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>




A partir de ellas se deducen las siguientes propiedades

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, donde c es cualquier constante

2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante

4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

CIERRE:

Se realiza el análisis de las fortalezas y las debilidades para potenciarlas. Se pregunta: ¿Qué hemos aprendido en esta semana? ¿Qué conceptos se ha INTERIORIZADO para el aprendizaje de la integral definida? ¿Cómo los has COORDINADO para el logro de tus
</td>
<td>calificada</td>
<td>10’</td>
</tr>
</table>

objetivos? ¿Para qué nos sirve en nuestra vida real? ¿Qué tema resultó más fácil y difícil? ¿Cómo se mejoró la comprensión del concepto de la suma de Riemann? ¿Respecto a la pregunta de TDC, es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia? ¿Existe una coherencia lógica en la descomposición genética del concepto de la integral definida? ¿Qué temas de investigación podemos abordar después de la comprensión del concepto de la integral definida?		

IV. Valoración de la coordinación de los aprendizajes

Criterios	Evidencia	Indicadores de desempeños	Instrumentos de evaluación
Conocimiento y comprensión Comunica y representa Resolución de problemas	• Trabajo grupal e individual. • Resolución de Preguntas de pruebas IB 1 y 2 de Matemática NM.	• Usa estrategias de identificación, de simulación y de procesos para la comprensión del área de una región formada debajo de una curva como suma límite. • Utiliza diferentes registros de representación para la comprensión de la integral definida. • Reconoce las propiedades y características fundamentales de la integral definida.	Rúbrica de Trabajo en aula. Lista de cotejo. Práctica calificada Esquema de calificación de práctica.

V. Bibliografía y/o recursos de soporte para el docente y estudiante

- Buchanan, L. y otros (2014). *Matemáticas Nivel Medio*. OXFORD.
- Fannon, P; Kadelburg, V; Wolley, B; Ward, S (2012); *Mathematics for the IB Diploma.* Gran Bretaña: Cambridge University Press.
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de una Variable*. Editorial Cengage. México.

JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

UNIDAD IV– SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 7-9

“Comprendiendo el teorema fundamental del cálculo a partir del valor medio”

I. Datos generales

1.1 Colegio de Alto Rendimiento: LA LIBERTAD/PIURA/TACNA
1.2 Asignatura : MATEMÁTICA NIVEL MEDIO (NM)
1.3 Horas pedagógicas :06
1.4 Fecha : Del 09 al 14 de julio del 2018
1.5 Grado y sección :QUINTO A, B, C, D.
1.6 Profesor :JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

II. Vínculo con los componentes del programa del diploma y el proyecto interdisciplinario

x	Teoría del Conocimiento		Monografía
	Creatividad, actividad y servicio		Proyecto interdisciplinario
x	Mentalidad Internacional		

Vínculo con TDC:
Se motiva la participación activa de los estudiantes para responder la pregunta de conocimiento: ¿Es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia?
Vínculo con Mentalidad Internacional:
Se reflexionará sobre el desarrollo y los aportes del cálculo integral a través de la historia y de las diferentes culturas.

III. Proceso de enseñanza-aprendizaje

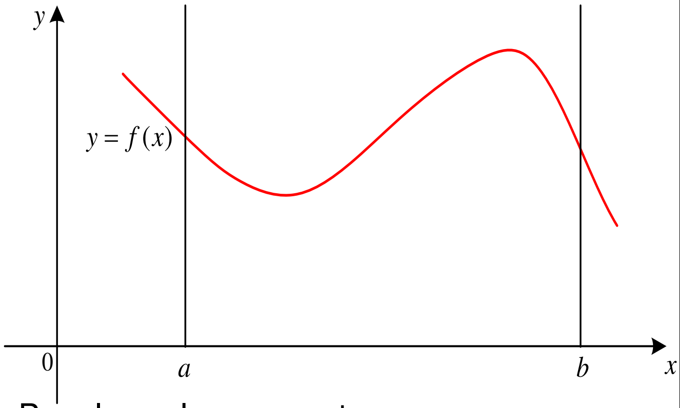
Capacidades:
- Elabora y usa modelos algebraicos.
- Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

Desempeños precisados:
- Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares, simbólicas y lenguaje algebraico su comprensión sobre las aplicaciones de la integral definida en problemas contextualizados, estableciendo relaciones y conjeturas entre sus representaciones sobre el teorema del valor medio y el primer y segundo teorema fundamental del cálculo.
- Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos tecnológicos, métodos gráficos y de cálculo, propiedades de la integral para la

<table>
<tr><td colspan="3">comprensión del el teorema del valor medio y el primer y segundo teorema fundamental del cálculo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Temáticas:
• Teorema del valor medio
• Teoremas fundamentales del cálculo.
• Aplicaciones del segundo teorema fundamental del cálculo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Evidencia:
• Prácticas desarrolladas por el estudiante en su cuaderno.
• Resolución individual de hojas de trabajo.
• Pruebas individuales o grupales resueltas.</td></tr>
<tr><td>Actividades en la enseñanza-aprendizaje: Encapsulación y desencapsulación del concepto matemático</td><td>Recursos y materiales</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>BLOQUE I

INICIO

• El docente saluda a los estudiantes y dialoga sobre las expectativas para este primer bloque de la sesión, estableciendo compromisos para tener el éxito esperado. Además explica que es ENCAPSULAR Y DESENCAPSULAR un concepto matemático. Los estudiantes reflexionan sobre este proceso mental que se da en el cotidiano de las sesiones.
• El docente dialoga sobre el tema tratado en la clase anterior referida a las sumas de Riemann, la integral definida y la aplicación de esta para hallar el área debajo de la curva. En sentido pide DESENCAPSULAR el concepto de la suma de Riemann y la integral definida para hallar el área debajo de la curva por otros procedimientos.
• En ese sentido plantea la posibilidad de hallar el área bajo la curva mediante el Teorema del valor medio (CONCEPTO A ENCAPSULAR).</td><td>▪ Material impreso
▪ Cuaderno de apuntes
▪ Calculadora de pantalla gráfica
▪ Proyector multimedia
▪ Pizarra y plumones</td><td>10’</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>


Para lo cual se pregunta:
- ¿Cuál es el área mínima del área bajo la curva entre el eje x y las rectas x = a y x = b?
- ¿Cuál podría ser el área máxima?
- ¿Cuál debería ser la altura óptima del rectángulo para obtener un área equivalente al área bajo la curva?
• En ese momento se crea la necesidad y el interés por el aprendizaje de este nuevo concepto.

PROCESO

• Para el logro del propósito de la clase el docente esboza el teorema del valor medio (VM) de la siguiente manera:
Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ entonces existe un número c en $[a,b]$, tal que $f(c)=\mu(f)$
Dónde: $\mu(f)$: media de f

• Luego con la participación de los estudiantes DESENCAPSULAN el concepto de la integral definida para demostrar el referido teorema, bajos el siguiente procedimiento:
</td>
<td>Power Point
Laptop
Pizarra</td>
<td>70’</td>
</tr>
</table>

Como f es continua, existen $x_1, x_2 \in [a,b]$, tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$.

Integrando entre a y b tenemos que

$$f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)(b-a)$$

(DESENCAPSULAN EL CONCEPTO)

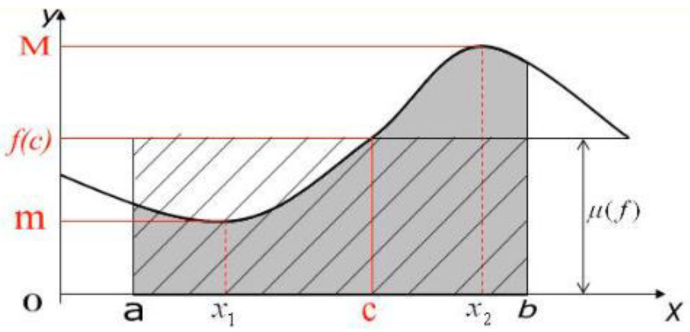
Y dividiendo entre $(b-a)$, tenemos que;

$$\frac{f(x_1)}{(b-a)}(b-a) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \leq \frac{f(x_2)}{(b-a)}(b-a)$$

$$f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \leq f(x_2)$$

Ahora por el teorema de los valores intermedios, existe un valor c entre x_1, x_2 tal que:

$$f(c) = \mu(f) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$



De lo anterior se puede deducir que:

$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $a \leq c \leq b$; *es decir que el área debajo de la curva es igual al área del rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)$.*

- Luego el docente pide a los estudiantes que reflexionen y expliquen cómo es posible que la integral definida sea equivalente al área de un

rectángulo. Los estudiantes discuten y socializan sus puntos de vista. • El docente realiza algunas aplicaciones sobre el teorema de estudio para aclarar aspectos que no hayan quedado claro. • Los estudiantes resuelven los problemas en la ficha de trabajo elaborado por el docente y presentan sus respuestas en su cuaderno, en la pizarra o en algún medio tecnológico para socializar su trabajo elaborado, destacándose la creatividad en el proceso, el uso de estrategias y recursos tecnológicos para su comprobación respectiva. • El docente, mediante la guía de observación y considerando los criterios de evaluación valora el desempeño individual y en equipo de cada uno de los estudiantes; destacando ante todo el ***error como una oportunidad de aprendizaje***.	Diapositiva Laptop Ficha de trabajo	
CIERRE: Finalmente, el docente plantea las siguientes interrogantes: **¿Qué aprendimos? ¿Qué estrategias nos permitieron comprender el tema? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos? ¿Cómo podemos seguir aprendiendo y profundizando acerca del tema?** Los estudiantes de manera voluntaria socializan sus respuestas. ¿Qué conceptos se han **Interiorizado, coordinado, desencapsulado** y cual se ha **encapsulado**?		10’
BLOQUE II **INICIO:** • El docente reflexiona sobre la comprensión de los conceptos matemáticos y la forma como se van construyendo bajo una secuencia o		10’

<table>
<tr>
<td>
DESCOMPOSICIÓN GENETICA del concepto.

Así mismo se comenta sobre el teorema del valor medio como concepto ENCAPSULADO. Al mismo tiempo que para la construcción se otros conceptos es necesarios DESENCAPSULAR. Finalmente que la construcción del concepto matemático es un proceso de ENCAPSULACIÓN Y DESENCAPSULACIÓN de conceptos.
El docente pregunta, ¿cómo se puede hallar el área de una región formada debajo de una curva sin necesidad de realizar particiones y aproximaciones del área?
En este momento se crea el conflicto cognitivo y el interés por el aprendizaje.

PROCESO:

El docente inicia el desarrollo de la clase indicando que para lograr el cometido se va utilizar el teorema del valor medio, en las siguientes demostraciones:
Explica el procedimiento para demostrar el primer teorema fundamental del cálculo, es decir:

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea x cualquier número de $[a,b]$. Si F es la función definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces, $F'(x)=f(x)$.

Demostración:

Por definición de derivada sabemos que:
$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt}{h}$$
$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt}{h}$$
</td>
<td>

Material impreso
Cuaderno de apuntes
Calculadora de pantalla gráfica
Proyector multimedia
Pizarra y plumones
Hoja de calculo
Geogebra

</td>
<td>70’</td>
</tr>
</table>

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h};$$

Por el teorema del valor medio $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$*; sea* $c \in [a,b]$*, tenemos;*

$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c)(x+h-x)}{h}$*; simplificando,*

$F'(x) = \lim_{h \to 0} f(c)$*; como* $x \le c \le x+h$ *y como* $h \to 0$*, tenemos que* $c = x$

Por lo tanto $F'(x) = f(x)$.

- De este primera demostración de reflexiona sobre el significado de la expresión. Al término se enfatiza que la función primitiva es la derivada de la integral definida.
- Así mismo, explica el procedimiento para demostrar el segundo teorema fundamental del cálculo, es decir:

Sea f *integrable en* $[a,b]$.

Si existe una función F *continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b) *tal que* $F'(x) = f(x)$ *en* (a,b),

entonces; $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Demostración:

Si $F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$

Si Hacemos:

$$x = a \Rightarrow F(a) = \int_a^a f(t)dt + C \Rightarrow F(a) = 0 + C \Rightarrow F(a) = C$$

$$x = b \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)dt + C \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a)$$

Como a *y* b *no dependen de* t*, entonces podríamos afirmar que:* $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$;

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

- El docente promueve un espacio de discusión para analizar este resultado y los beneficios para hacer algunos cálculos prescindiéndose la partición de intervalos y comprender

cabalmente la relación de la suma de Riemann y la integral definida. **CIERRE**: Finalmente, el docente plantea las siguientes interrogantes: **¿Qué aprendimos? ¿Qué estrategias nos permitieron comprender el tema? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos? ¿Cómo podemos seguir aprendiendo y profundizando acerca del tema?** Los estudiantes de manera voluntaria socializan sus respuestas. ¿En qué consiste el primer y segundo teorema del cálculo? ¿Qué conceptos se han **INTERIORIZADO, COORDINADO, DESENCAPSULADO** y cual se ha **ENCAPSULADO** para la comprensión de estos dos teoremas? **BLOQUE III** **INICIO** • El docente saluda a los estudiantes, luego, dialoga y reflexiona con los estudiantes sobre sus expectativas para este tercer bloque de la sesión que consistirá en aplicar los dos teoremas fundamentales del Cálculo en la resolución de casos de integración. • A continuación, les presenta el propósito de la sesión, el cual consiste en **resolver situaciones problemáticas relacionadas con el uso de integrales aplicando los teoremas fundamentales del cálculo.** **PROCESO** • Los estudiantes en su ficha de trabajo y con la orientación del docente demuestran dichos teoremas y los aplican en la resolución de casos de integración, luego verifican aplicando el límite infinito de la suma de	▪ Material impreso ▪ Cuaderno de apuntes	10’ 10’ 70’

Riemann y también usan la CPG o el software Geogebra. • Luego, los estudiantes resuelven ejercicios planteados, presentan sus trabajos en su cuaderno, en la pizarra o en algún medio tecnológico para socializar el mismo, destacándose la creatividad en el proceso, el uso de estrategias y recursos tecnológicos. • Luego los estudiantes en grupos o en pares resuelven los ejercicios propuestos. El docente, mediante la guía de observación y considerando los criterios de evaluación establecidos, valora el desempeño de los estudiantes; destacando, ante todo, el ***error como una oportunidad de aprendizaje***. • El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia de comprender el significado y la utilidad del teorema fundamental del cálculo relacionado con la integral definida. • Al finalizar se aplicará una práctica de control, estableciendo el principio de la evaluación como estrategia de aprendizaje **CIERRE:** • Finalmente, el docente plantea las siguientes interrogantes: **¿Qué aprendimos? ¿Qué estrategias nos permitieron comprender el tema? ¿Dónde podemos utilizar lo que hemos aprendido? ¿Cómo podemos seguir aprendiendo y profundizando acerca del tema?** Los estudiantes de manera voluntaria socializan sus respuestas. • ¿Qué conceptos se han **INTERIORIZADO, COORDINADO, DESENCAPSULADO** y cual se ha **ENCAPSULADO** para la comprensión de estos dos teoremas? • ¿respecto a la pregunta de TDC, es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia? ¿Existe una coherencia lógica en **LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA**? ¿Qué temas de investigación podemos	▪ Calculadora de pantalla gráfica ▪ Proyector multimedia ▪ Pizarra y plumones • Hoja de calculo • Geogebra • Práctica calificada	10’

abordar después de la comprensión del concepto de la integral definida?		

IV. Valoración de la coordinación de los aprendizajes

Criterios	Evidencia	Indicadores de desempeños	Instrumentos de evaluación
Conocimiento y comprensión Comunica y representa Resolución de problemas	• Trabajo grupal e individual. • Resolución de Preguntas de pruebas IB 1 y 2 de Matemática NM.	• Determina el teorema fundamental cálculo a partir de las demostraciones del valor medio de la integral. • Analizar la forma y el método que los estudiantes utilizan en la resolución de ejercicios sobre el cálculo de áreas y volúmenes. • Determinar qué tipo de argumentos en cuanto a las formas de representación (gráfico, algebraico, numérico) utilizan los estudiantes para justificar la propiedad aditiva de la Integral Definida.	Rúbrica de Trabajo en aula. Lista de cotejo. Práctica calificada Esquema de calificación de práctica.

V. BIBLIOGRAFÍA Y/O RECURSOS DE SOPORTE PARA EL DOCENTE Y ESTUDIANTE

- Buchanan, L. y otros (2014). *Matemáticas Nivel Medio*. OXFORD.
- Fannon, P; Kadelburg, V; Wolley, B; Ward, S (2012); *Mathematics for the IB Diploma.* Gran Bretaña: Cambridge University Press.
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de una Variable*. Editorial Cengage. México.

JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

UNIDAD IV– SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 10-12

“Aplicando la integral definida a situaciones de la vida real”

I. Datos generales

1.1 Colegio de Alto Rendimiento: LA LIBERTAD/PIURA/TACNA
1.2 Asignatura : MATEMÁTICA NIVEL MEDIO (NM)
1.3 Horas pedagógicas : 06
1.4 Fecha : Del 16 al 21 de julio del 2018
1.5 Grado y sección :QUINTO A, B, C, D.
1.6 Profesor :JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

II. Vínculo con los componentes del programa del diploma y el proyecto interdisciplinario

x	Teoría del Conocimiento		Monografía
	Creatividad, actividad y servicio		Proyecto interdisciplinario
x	Mentalidad Internacional		

Vínculo con TDC:
Se motiva la participación activa de los estudiantes para responder la pregunta de conocimiento: ¿Es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia?
Vínculo con Mentalidad Internacional:
Se reflexionará sobre el desarrollo y los aportes del cálculo integral a través de la historia y de las diferentes culturas.

III. Proceso de enseñanza-aprendizaje

Capacidades:
- Elabora y usa modelos algebraicos.
- Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

Desempeños precisados:
- Usa estrategias para identificar, seleccionar y aplicar adecuadamente el concepto de la indefinida para calcular el área formada debajo de una región sombreada y el volumen de un sólido de revolución.
- Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y lenguaje algebraico su comprensión sobre la aplicación de la integral definida a diversos contextos de la vida real.

Temáticas:
- Área de la región formada debajo de la curva.
- Volumen de un sólido de revolución.

<table>
<tr><td colspan="2">Evidencia:
• Prácticas desarrolladas por el estudiante en su cuaderno.
• Resolución individual de hojas de trabajo.
• Pruebas individuales o grupales resueltas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Actividades en la enseñanza-aprendizaje:
La tematización de la integral definida</td><td>Recursos y materiales</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>BLOQUE I

INICIO

• En esta sesión el docente explica a los estudiantes que el proceso de aplicar los CONCEPTOS ENCAPSULADOS sobre la integral definida u otro concepto matemático se refiere a la fase de TEMATIZACIÒN.
• Se indica que una de las aplicaciones directas de encontrar el área debajo de la curva es a través del segundo teorema fundamental del cálculo ya ENCAPSULADO en la sesión anterior.
• El docente enfatiza sobre las condiciones para hallar el área debajo de la curva; es decir, considerar cuando el área está por debajo del eje x. Bajo esas condiciones pide hallar el área de la función f(x)=Senx, desde –π a π.
• En ese momento se crea la necesidad de aprendizaje

PROCESO

• El docente inicia plantea las condiciones para hallar el área debajo de la curvas. En ese sentido refuerza la idea que para hallar el área de la región debajo de la curva, se debe utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo.
• De acuerdo a las técnicas para calcular integrales definidas, en esta sección se desarrollarán problemas sobre áreas de</td><td>▪ Material impreso

▪ Cuaderno de apuntes

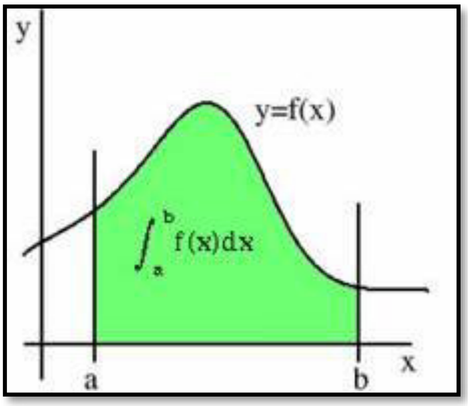
▪ Calculadora de pantalla gráfica

▪ Proyector multimedia

▪ Pizarra y plumones</td><td>10’

70’</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
regiones debajo de una curva o entre dos curvas.



- Los estudiantes resuelven una variedad aplicaciones presentadas en el material de trabajo y el docente aplica sus respectivas rúbricas.

CIERRE:
Finalmente, el docente plantea las siguientes interrogantes: **¿Qué aprendimos? ¿Qué estrategias nos permitieron comprender el tema? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos? ¿Cómo podemos seguir aprendiendo y profundizando acerca del tema?** Los estudiantes de manera voluntaria socializan sus respuestas.
¿Qué conceptos se han **INTERIORIZADO, COORDINADO, DESENCAPSULADO** y cual se ha **ENCAPSULADO**?

BLOQUE II

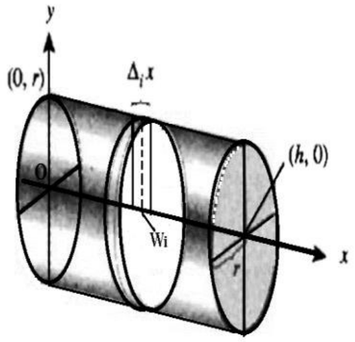
INICIO:

- El docente saluda a los estudiantes, dialoga y reflexiona con los estudiantes sobre sus expectativas para este segundo bloque de la sesión que consistirá en conocer y aplicar las integrales en otros contextos matemáticos como es el caso de la geometría.
- El docente presenta:
</td>
<td>
Power Point
Laptop
Pizarra
</td>
<td>
10’
10’
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Deducir el volumen de un cilindro aplicando la integral definida tomando como referencia el gráfico mostrado.



- El docente plantea la siguiente pregunta: **¿Cómo podemos hallar el volumen de un cilindro de revolución aplicando la integral definida?**
- Esta pregunta genera el conflicto cognitivo en los estudiantes y despierta el interés por aprender algo nuevo.
- Los estudiantes reflexionan, resuelven, dialogan en pares y emiten sus respuestas en forma ordenada. El docente acoge las respuestas dadas sin juzgar la validez o no de las mismas.

PROCESO:

- A continuación, les presenta el propósito de la sesión, el cual consiste en **aplicar la integral definida para calcular volúmenes de sólidos generados por la rotación de regiones planas alrededor del eje x en un sistema de coordenadas, tal como se muestra a continuación:**

Sea f la función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y suponiendo que $f(x)\geq 0$ para toda x en $[a,b]$. Sea R la región limitada (de área A) por la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$, La siguiente figura muestra la región R y el i-ésimo rectángulo.

</td>
<td>

Diapositiva

Laptop

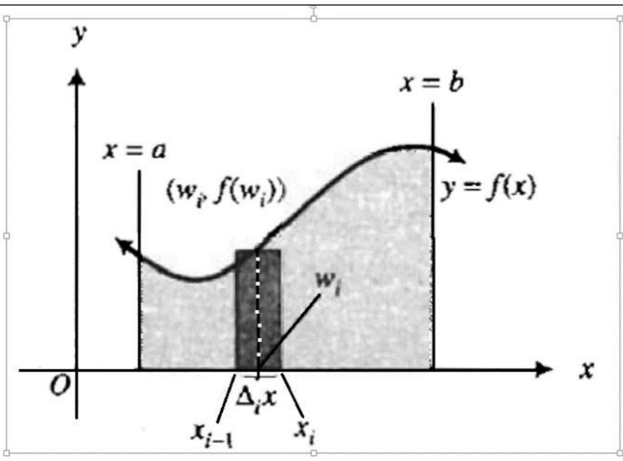
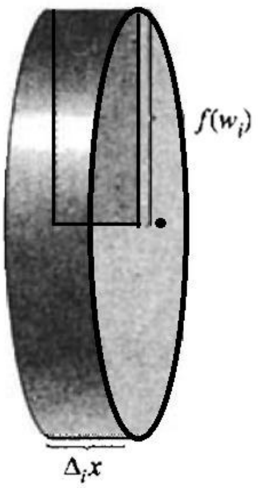
Ficha de trabajo

- Material impreso

</td>
<td>

70’

</td>
</tr>
</table>

 *Cuando el i-ésimo rectángulo se gira alrededor del el eje x se obtiene un elemento de volumen el cual es un disco cuya base es un circulo de radio $f(w_i)$ unidades y cuya altura mide $\Delta_i x$ unidades, como se muestra a continuación;*  *Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen del i-ésimo disco, entonces,* $\Delta_i V = \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x.$ *Como existen n rectángulos, se obtienen n discos de esta forma, y la suma de las medidas de los volúmenes de estos n discos es;* $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x.$ *Esta es una suma de Riemann.* *Por lo tanto, si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, se deduce que V es el*	▪ Cuaderno de apuntes ▪ Calculadora de pantalla gráfica ▪ Proyector multimedia ▪ Pizarra y plumones • Hoja de calculo • Geogebra	

límite de esta suma de Riemann cuando $\lvert\Delta\rvert$ *se aproxima acero; es decir;* $V = \lim_{\lvert\Delta\rvert \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi [f(w_i)]^2 \Delta_i x$ *; que es lo mismo que;* $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. • Los estudiantes en su ficha de trabajo y bajo la orientación del docente demuestran la forma cómo hallar el volumen de un sólido aplicando la suma de discos aplicando el proceso del límite a la suma de Riemann, luego verifican aplicando la integral definida haciendo uso o no de recursos tecnológicos. • Luego, los estudiantes resuelven ejercicios planteados. Presentan sus trabajos en su cuaderno, en la pizarra o en algún medio tecnológico para socializar el mismo, destacándose la creatividad en el proceso, el uso de estrategias y recursos tecnológicos. • Luego los estudiantes en grupos o en pares resuelven los ejercicios propuestos. El docente, mediante la guía de observación y considerando los criterios de evaluación establecidos, valora el desempeño de los estudiantes; destacando, ante todo, el ***error como una oportunidad de aprendizaje***. • El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia de conocer y comprender el uso de la integral definida en situaciones problemáticas diversas. • Al finalizar se aplicará una práctica de control, estableciendo el principio de la evaluación como estrategia de aprendizaje. CIERRE • Finalmente, el docente plantea las siguientes interrogantes: **¿Qué aprendimos? ¿Qué estrategias nos permitieron comprender el tema? ¿Dónde podemos utilizar lo que hemos aprendido? ¿Cómo podemos seguir**		10’

aprendiendo y profundizando acerca del tema? Los estudiantes de manera voluntaria socializan sus respuestas. **BLOQUE III** **INICIO** **Se inicia el proceso de resolución de problemas formados en equipos de trabajo.** **El docente guía el trabajo y aclara dudas sobre algunos aspectos que no hayan quedado interiorizados en la unidad.** **PROCESO** El docente gestiona los espacios para del trabajo AUTONOMO; y se evalúa a través de una prueba escrita. **CIERRE:** • Finalmente, el docente plantea las siguientes interrogantes: **¿Qué aprendimos? ¿Qué estrategias nos permitieron comprender el tema? ¿Dónde podemos utilizar lo que hemos aprendido? ¿Cómo podemos seguir aprendiendo y profundizando acerca del tema?** Los estudiantes de manera voluntaria socializan sus respuestas. • ¿Qué conceptos se han **INTERIORIZADO, COORDINADO, DESENCAPSULADO** y cual se ha **ENCAPSULADO** para la comprensión de estos dos teoremas? • ¿respecto a la pregunta de TDC, es en realidad, la matemática la ciencia exacta por excelencia? ¿Existe una coherencia lógica en **LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA**? ¿Qué temas de investigación podemos abordar después de la comprensión del concepto de la integral definida?	▪ Material impreso ▪ Cuaderno de apuntes ▪ Calculadora de pantalla gráfica ▪ Proyector multimedia ▪ Pizarra y plumones • Hoja de calculo • Geogebra • Prueba escrita	10’ 70’ 10’

IV. VALORACIÓN DE LA COORDINACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

Criterios	Evidencia	Indicadores de desempeños	Instrumentos de evaluación
Conocimiento y comprensión Comunica y representa Resolución de problemas	• Trabajo grupal e individual. • Resolución de Preguntas de pruebas IB 1 y 2 de Matemática NM.	• Analiza la relación entre la imagen y la definición del concepto respecto a la continuidad e integrabilidad. • Analiza la comprensión del concepto de la integral definida, para hallar el área formada debajo de una curva y el volumen de un sólido de revolución. • Argumenta el nivel de la relación entre la definición del concepto y la imagen del concepto de Integral Definida.	Rúbrica de Trabajo en aula. Lista de cotejo. Prueba escrita Esquema de calificación de práctica.

V. Bibliografía y/o recursos de soporte para el docente y estudiante

- Buchanan, L. y otros (2014). *Matemáticas Nivel Medio*. OXFORD.
- Fannon, P; Kadelburg, V; Wolley, B; Ward, S (2012); *Mathematics for the IB Diploma.* Gran Bretaña: Cambridge University Press.
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de una Variable*. Editorial Cengage. México.

JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR

Anexo 4: Pre test y post test de la prueba de matemática

Apellidos y nombres: …………………………………………………..……..……….

Grado y sección:…………………………………………………..……………

Fecha:………………..…………………………………………….……..…..……

Tema: integral definida

Instrucciones para los estudiantes.

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas para tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [60 puntos].
- La Prueba tiene una duración de 1 hora 30 minutos.

CRITERIO	CONOCIMIENTO Y COMPRENSIÓN	COMUNICA Y REPRESENTA	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
CALIFICACIÓN			

1. [Puntuación: 4]

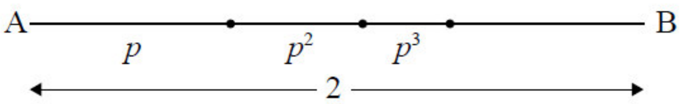
(a) Grafique las siguientes funciones: [3 puntos]

(i) $f(x) = 2x$	(iii) $f(x) = \lvert 2x - 1 \rvert$
(ii) $f(x) = 2x - 1$	

(b) Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \lvert 2x - 1 \rvert$ en el intervalo [0,2] y el eje x. Acompañe con la gráfica correspondiente. [1 punto]

2. [Puntuación: 3]

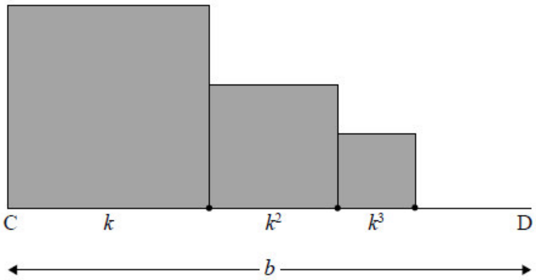
(a) La siguiente figura muestra a [AB], cuya longitud es igual a 2 cm. La recta se divide en un número infinito de segmentos de recta. La figura muestra los tres primeros segmentos.



Las longitudes de estos segmentos de recta son: p cm, p^2 cm, p^3 cm, …, donde $0 < p < 1$.
Muestre que, $p = 2/3$. [1 punto]

(b) Esta otra figura muestra a [CD], cuya longitud es igual a b cm, donde $b > 1$. A lo largo de [CD] se dibujan cuadrados de lado k cm, k^2 cm, k^3cm,

…, donde; $0 < k < 1$. Este proceso se lleva a cabo indefinidamente. La figura muestra los tres primeros cuadrados. [2 puntos]

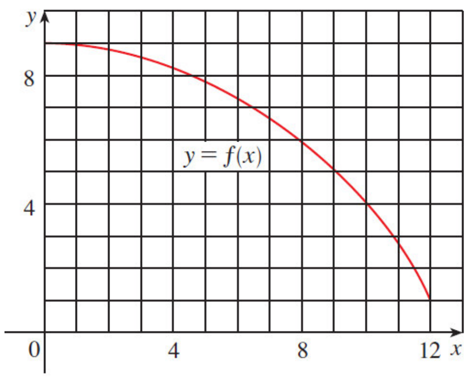


La suma total de las áreas de todos los cuadrados es igual a 9/16.

Halle el valor de *b*.

3. [Puntuación: 3]

Dado el gráfico.



Del gráfico mostrado use 6 rectángulos de bases iguales para hallar una aproximación inferior del área debajo de la curva y una superior en el intervalo [0,12]. [2 Puntos]

(a) Calcule la suma inferior.

(b) Calcule la suma superior.

Describa lo realizado en la gráfica.

……………………………………………

……………………………………………

(c) Sin resolver. Si tomamos los puntos medios de los 6 rectángulos de bases iguales del apartado (a) y aproximamos el área debajo de la curva; ¿cuál de las tres aproximaciones dará la mejor estimación del área bajo la curva? Justifique su respuesta. [1 Punto]
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

4. [Puntuación: 6]

   Sea R la región formada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el intervalo [0,4].

   (a) Grafique y utilice particiones para aproximar el área de la región R debajo de la curva. [5 puntos]

(i) Realice aquí su gráfica.
(ii) Escriba el número de particiones que ha utilizado:…………………………………………………………...   (iii) Escriba el número de rectángulos que va a considerar para calcular el área:………………………………………………..   (iv) Escriba el área de cada rectángulo utilizado:…………………………………………………..….
(v) Halle el área debajo de la curva en el intervalo dado.   *Realice aquí sus operaciones:*

   (b) Justifique sus resultados y a que conclusión se podría arribar, respecto al número de particiones. [1 punto]

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

5. [Puntuación: 4]

   Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función f(x)=4x y el eje x, en el intervalo [-2,2]. [1 punto c/u]

(a) Dibuje y rotule adecuadamente todos los elementos de la gráfica.	(b) el gráfico mostrado en (a) calcule el área de la región R. Justifique sus resultados: …………………………………………… ……………………………………………
(c) Calcule la integral $\int_{-2}^{2}(4x)dx$.	(d) ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justifique su respuesta. ………………………………………

6. [Puntuación: 3]

   Determina el valor de verdad de cada proposición. En caso de que sea falsa, explica por qué o muestra un contraejemplo.

   - Si $F'(x)=G'(x)$ en el intervalo $[a,b]$, entonces $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ ……………………………………………………………………………………( )
   - Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$………...( )
   - $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = -1x^{-1}\Big|_{-1}^{1} = (-1)-1 = -2$ ……………………………………………..…( )

Aquí realice su explicación:
……………………………………………………………………………………………

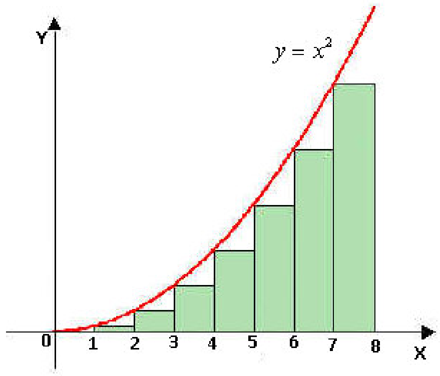
7. [Puntuación:2]

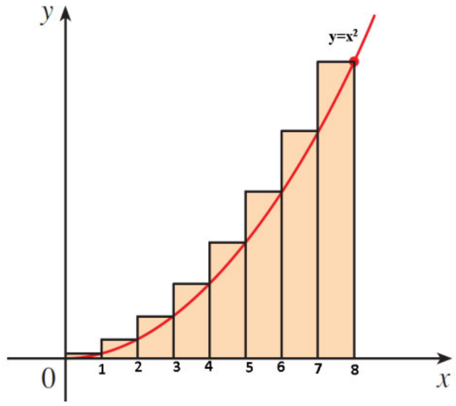
   Según su consideración, ¿qué relación existe entre la Suma de Riemann y la integral definida?

…………………………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………

8. [Puntuación: 4]

   (a) Dados los siguientes gráficos. [3 puntos]





(i) Determine las alturas de cada rectángulo considerando el extremo izquierdo.

(ii) Determine las alturas de cada rectángulo considerando el extremo derecho.

(iii) Determine la suma de las áreas en u^2 de las regiones rectangulares en cada gráfico.

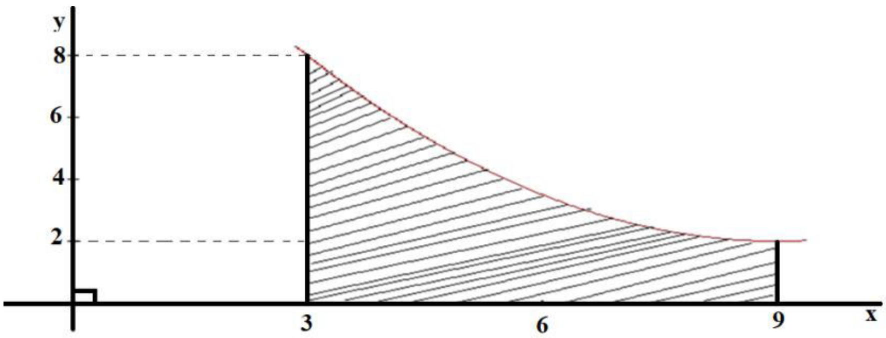
(b) ¿Qué diferencias existen entre las dos áreas obtenidas, del apartado (a)? ¿Por qué? [1 punto]

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

9. [Puntuación: 3]

El área de la región sombreada es mayor que 12 y menor que 48.



[1 punto c/u]

(a) ¿Por qué? Justifica. …………………………………………………………………………………… (b) ¿Puedes dar valores del área más próximos al área formada debajo de la curva?, ¿cuáles? …………………………………………………………………………………… (c) ¿Cómo obtuvo los valores que usted ha mencionado en el apartado anterior?

10. [Puntuación: 8]

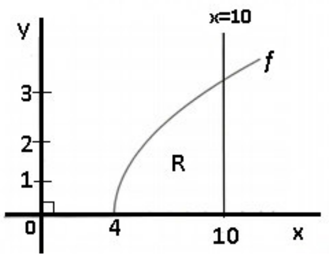
Sea $f(x) = x^2 - 2x; 0 \le x \le 3$.

(a) Grafique y halle la suma de Riemann con n=6 (subintervalos), para ello tome los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. De su respuesta correcta hasta con tres cifras significativas. [6 puntos]
(b) ¿Qué representa la suma de Riemann? [2 puntos] …………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………

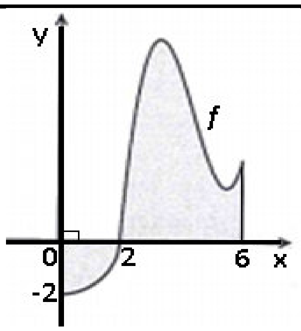
11. [Puntuación: 3]

Seguir las siguientes instrucciones:

(a) Halle $\int_4^{10} (x-4)dx$. [1 punto]	
(b) A continuación se muestra una parte de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-4}$, para $x \ge 4$. La región sombreada R está delimitada por la gráfica de f, la recta $x = 10$ y el eje x.	Solución:

 La región R se rota 360º alrededor del eje x . Halle el volumen del sólido de revolución así generado. [2 puntos]	

12. [Puntuación: 3]
A continuación se muestra la gráfica de una función f , para $0 \le x \le 6$.

 La primera parte de la gráfica es un cuarto de círculo de radio 2 unidades (u) y con centro en el origen.	(c) Halle $\int_0^2 f(x)dx$. [1 punto] (d) La región sombreada está delimitada por la gráfica de f , el eje y , el eje x y la recta $x=6$. El área de esta región es $3\pi u^2$. Halle $\int_2^6 f(x)dx$. [2 puntos]

13. [Puntuación: 2]

Considere una función $f(x)$ tal que $\int_1^6 f(x)dx = 8$.

(a) Halle $\int_1^6 2f(x)dx$. [1 punto]	(b) Halle $\int_1^6 [f(x)+2]dx$. [1 punto]

14. [Puntuación: 12]

Sea $f(x) = \dfrac{6x}{x+1}$, para $x > 0$.

(a) Halle $f'(x)$. [3 puntos]

Sea $g(x)=\ln(\frac{6x}{x+1})$, para $x>0$.

(b) Compruebe que $g'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. [3 puntos]

(c) Sea $h(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. El área de la región delimitada por la gráfica de h, el eje x y las rectas $x=\frac{1}{5}$ y $x=k$ es igual a $\ln 4$. Sabiendo que $k>\frac{1}{5}$, halle el valor de k. [6 puntos]

Escriba aquí su solución.

Anexo 5: Validación de los instrumentos de recolección de datos por los expertos

VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE: ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS ACCIÓN-PROCESO-OBJETO-ESQUEMA.

- AUTOR: JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR
- APELLIDOS Y NOMBRES DEL EXPERTO:________________________________
- Magíster/Doctor(a):____

TÍTULO: Estrategias metodológicas basadas en Acción Proceso Objeto Esquema y comprensión de la integral definida en estudiantes de los Colegios de Alto Rendimiento

Aspectos	Criterios	Inadecuado 00-25%	Poco adecuado 26-50%	Adecuado 51-75%	Muy adecuado 76-100%
Intencionalidad	La propuesta metodológica permite la comprensión de la integral definida, por lo que el instrumento presentado es.				
Suficiente	La propuesta metodológica está bien diseñada, planificada y cronogramada por lo tanto el instrumento presentado es.				
Consistencia	La propuesta metodológica se basa en conocer el nivel de comprensión de la integral definida a través de la acción, proceso, objeto y esquema, por lo tanto el instrumento presentado es.				
Coherencia	La propuesta metodológica guarda relación con las dimensiones e indicadores, por lo tanto el instrumento es.				

Lima, ___de ________del 2018

____
FIRMA DEL JURADO

DNI:_______________________

VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE LA VARIABLE DEPENDIENTE: COMPRENSIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

- AUTOR: JOSE LUIS MAURTUA AGUILAR
- APELLIDOS Y NOMBRES DEL JURADO EXPERTO:_________________________
- Magíster/Doctor(a):____

TÍTULO: Estrategias metodológicas basadas en Acción Proceso Objeto Esquema y comprensión de la integral definida en estudiantes de los Colegios de Alto Rendimiento

Aspectos	Criterios	Inadecuado 00-25%	Poco adecuado 26-50%	Adecuado 51-75%	Muy adecuado 76-100%
Intencionalidad	El test permite conocer el nivel de logro de la comprensión de la integral definida, por lo que el instrumento presentado es.				
Suficiente	El número de preguntas elaborada es.				
Consistencia	El test se basa en conocer la integral definida, por lo tanto el instrumento presentado es.				
Coherencia	El test guarda relación con las dimensiones e indicadores, por lo tanto el instrumento es.				

Lima, ___de _________ del 2018

____

FIRMA DEL JURADO

DNI:_______________________